
1 Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

4. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x - 6)$

5. $f : x \mapsto \ln(x + 3) - \ln(2x + 1)$

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^3 + x^2 + x}$

7. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x + 1}{-x + 4}}$

8. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$

9. $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$

10. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x + 1)}$

2 Parité et imparité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f .

1.a) $f : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$

1.b) $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$

1.c) $f : x \mapsto e^{x^2}$

1.d) $f : x \mapsto \frac{x - 1}{x^2 + 1}$

1.e) $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$

1.f) $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$

1.g) $f : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$

1.h) $f : x \mapsto x^2 \ln(|x|)$

2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

Même question avec le produit de deux fonctions.

3. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

3 Vrai ou faux sur la parité

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$, alors f est paire.

2. Si f est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.

3. Si f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.

4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors f ne peut pas être paire.

4 Variations

Soient deux fonctions f et g définies sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et de même monotonie.

1. Démontrer que $f + g$ a la même monotonie que f et g .
2. On suppose que f est strictement monotone. Démontrer que $f + g$ est strictement monotone.

5 Variations et équivalence

1. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir :

$$\forall a, b \in I, \quad f(a) = f(b) \implies a = b.$$

2. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir :

$$\forall a, b \in I, \quad f(a) \leq f(b) \iff a \leq b.$$

3. Le résultat précédent est-il encore vrai si la croissance de f n'est pas stricte ?

6 Propriétés sur exp et ln

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les nombres $\ln(8)$, $\ln(\sqrt{2})$, $\ln(6) - \ln(3)$ et $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier les expressions suivantes sur leur ensemble de définition :

2.a) $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$

2.b) $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

2.c) $e^{2 \ln x}$

2.d) $-\ln(2x) - \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.e) $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2.f) $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

2.g) $\ln(e^2 \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

2.h) $\frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$

2.i) $\sqrt{e^{2x} e^{-x}}$

2.j) $\frac{e^{x^2-2x} \cdot (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

7 Irrationnel

Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un irrationnel.

8 Résolution d'équations avec les fonctions usuelles

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

-
- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\ln(1 + e^x) = 2$ | 8. $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$ |
| 2. $(1 + \ln(x))^2 = 4$ | 9. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$ |
| 3. $\sqrt{1 - \ln(x)} = 5$ | 10. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$ |
| 4. $ \ln(x) = 1$ | 11. $(\ln(x))^2 - 3 \ln x + 2 = 0$ |
| 5. $ e^x = 1$ | 12. $e^{2x} = 2e^x - 1$ |
| 6. $ x + 3 = -1$ | 13. $e^x + e^{-x} = 2$ |
| 7. $ x + 5 = 2x - 7 $ | |

● ● ○ ○ 9 Résolution d'inéquations avec les fonctions usuelles

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| 1. $ x + 5 < 3$ | 6. $\ln(10 - x^2) > 0$ |
| 2. $ x - 2 \leq 0$ | 7. $0,5^x < 0,1$ |
| 3. $ 2x - 1 \leq 4$ | 8. $e^{2x-1} \geq 1$ |
| 4. $ 9 - x^2 \leq -2$ | 9. $\frac{1}{e^x + 1} < 2$ |
| 5. $5 - x^2 < 0$ | 10. $2^x \leq 3$ |

● ● ○ ○ 10 Fonction partie fractionnaire

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2,5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0, 1[$, simplifier l'expression de $f(x)$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f .

● ○ ○ ○ 11 Calculs de dérivées

Trouver l'ensemble de dérivabilité des fonctions ci-dessous, puis déterminer leur dérivée.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | 2. $f_2 : x \mapsto \frac{5}{x^7}$ |
|------------------------------------|------------------------------------|

3. $f_3 : x \mapsto x \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$

5. $f_5 : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$

6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$

7. $f_7 : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

8. $f_8 : x \mapsto \sqrt{xe^x}$ sur $]0; +\infty[$

9. $f_9 : x \mapsto (\ln(1 + x))^4$ sur $] -1, +\infty[$

10. $f_{10} : x \mapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

12 Étude de fonctions

Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

1. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$

2. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2}$

3. $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

4. $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$

5. $f : x \mapsto \frac{3 + x}{x^3}$

6. $f : x \mapsto x^2 - x$

7. $f : x \mapsto x \ln(x) - x$

8. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$

9. $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

10. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

11. $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

12. $f : x \mapsto x \ln(x)$

13 Étude de deux fonctions

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x) - x + 1$

1. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = g(x)$.
3. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

14 Étude d'une fonction rationnelle

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x^3 + 4}{x - 1} \quad \text{et } C_f \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Étudier la parité de f .
2. Déterminer la dérivée de f .
3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.
 - 3.a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
 - 3.b) Calculer $g(2)$, puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (*Les limites de f ne sont pas demandées.*)
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0, notée T_0 .
Identifier la position relative de C_f par rapport à T_0 .
6. Représenter l'allure de C_f dans un repère du plan judicieusement choisi.

15 Manipuler les inégalités

1. Démontrer : $\forall n \in [2; +\infty[\cap \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$
2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \geq \sqrt{\frac{3}{x+5}}$.
3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 2^{x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
4. Démontrer : $\forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq x^2 + x \leq 2$.
5. Encadrer les expressions suivantes sur les intervalles donnés :
 - 5.a) x^2 sur $[-3; 1]$
 - 5.b) $e^{(1-x)^2}$ sur $[2; 4]$

16 Maximum sur les entiers

On dit qu'un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ admet un maximum, noté $\max(I)$, s'il existe $x \in I$ tel que, pour tout $y \in I$, $x \geq y$. Justifier l'existence et calculer la valeur de : $\max_{n \in \mathbb{N}^*} (\sqrt[n]{n})$.

On donne $\ln(2) \simeq 0,693$ et $\ln(3) \simeq 1,099$.

• • ○ ○ 17 Logarithme et moyenne

Démontrer que pour tous $x, y > 0$, $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$

• • • ○ 18 Décomposition d'une fonction

Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

• • • ○ 19 DS 2024

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 qu'on précisera.
 - (b) Vérifier que les réels x_1 et x_2 sont strictement positifs.
2.
 - (a) En posant $y = e^x$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 7e^x + 1 = 0$. On exprimera les solutions en fonction de x_1 et x_2 .
 - (b) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $e^{2x} - 7e^x + 1 > 0$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. L'objectif est de calculer le rapport $x = \frac{a}{b}$.
 - (a) Montrer que $\ln\left(\frac{b(x+1)}{3}\right) = \ln(b\sqrt{x})$
 - (b) En déduire les valeurs possibles de x .

• • ○ ○ 20 Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x + 2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ? En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour construire toute la courbe représentative de f .
3. Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}$.
4. Étudier le signe de $1 + 2 \cos x$ sur $[0, \pi]$.
5. Établir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
6. Tracer la courbe représentative de f .

● ● ○ ○ 21 Étude d'une fonction cosinus

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Déterminer une période T de f .
2. Déterminer en quels points f atteint son maximum, son minimum, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-T, T]$.
4. f est-elle paire ? impaire ?

● ● ● ○ 22 Identités trigonométriques et tangente

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.
2. Quelle inégalité peut-on en déduire pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$?
3. Déterminer la valeur de $\tan(\frac{\pi}{6})$ et $\tan(\frac{\pi}{3})$.
4. Soient $a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
 - (a) Montrer que $\tan(a)\tan(b) = 1$ si et seulement si $a + b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.
 - (b) Montrer que si $a + b \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.
 - (c) En déduire la valeur de $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Exercices sur la fonction partie entière

● ● ○ ○ 23 Identité sur la partie entière

Démontrer que, pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Indication : distinguer les cas $x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}[$ et $x \in [\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1[$.

● ● ● ○ 24 Partie entière d'une racine

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer $\left\lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 4} \right\rfloor$.

● ● ● ○ 25 Partie entière

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Indication : On pourra écrire $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in [0, 1[$.

2. Soient $h : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ et $g : x \mapsto |2x - 1|$. Montrer que la fonction $f = g \circ h$ est paire et périodique.

● ● ○ ○ 26 Inégalité sur la partie entière

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Indication : On pourra écrire $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in [0, 1[$, et distinguer selon que $\varepsilon \in [0, 1/2[$ ou que $\varepsilon \in [1/2, 1[$, et faire de même pour y .

● ○ ○ ○ 27 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, & n &\mapsto 2n, & f_2 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, & n &\mapsto -n, \\ f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2, & f_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+, & x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

● ● ○ ○ 28 Compositions et bijectivité

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

● ● ○ ○ 29 Bijection et fonction réciproque

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$ est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1} .

● ● ● ○ 30 Plus théorique sur les injections/surjections

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Démontrer que, si f est strictement monotone, alors f est injective, sans utiliser le théorème de la bijection réciproque.
2. Soient I, J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Soient I, J, K trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow K$. Démontrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
4. Chercher un exemple pour le point 2 où $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.
5. Chercher un exemple pour le point 3 où $g \circ f$ est surjective, mais f ne l'est pas.

31 Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f .
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α .
(b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α . En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
(c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1, +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g .
5. Montrer que g est dérivable sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$. Pour $x \neq 0$, exprimer $g'(x)$ en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle, puis calculer $g'(0)$.
6. Montrer que l'équation $2^{-x} = x$ admet une unique solution réelle et que celle-ci vaut $x = \frac{g(\ln(2))}{\ln(2)}$ (on ne cherchera pas à l'explicitier davantage).
7. Exprimer de même l'unique solution de l'équation $x^x = 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g . Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $i(a) = m_a$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du minimum de h_a est une fonction croissante du paramètre a , et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.