

Exercices du chapitre 0 : Les bases

1 Écriture mathématique

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. À tout réel, on peut trouver un réel qui lui soit strictement inférieur.
2. Tout réel non nul est l'inverse d'un unique réel non nul.
3. La fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction constante égale à 1.
4. Tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers naturels.¹
5. Pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en entiers naturels non nuls.²
6. Si un réel positif est inférieur ou égal à tout autre réel strictement positif, alors il est nul.

Corrigé

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists! y \in \mathbb{R}^*, x = \frac{1}{y}.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1.$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{N}, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, x^n + y^n \neq z^n.$
6. $\forall a \in \mathbb{R}_+, (\forall x \in \mathbb{R}_+^*, a \leq x) \Rightarrow a = 0.$

2 Négation

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

1. Tous les élèves de cette classe sont des filles.
2. Il a fait beau tous les jours de la semaine.
3. Il existe une copie de dissertation de philosophie sans faute d'orthographe.

¹Ce théorème a été conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638, français) en 1621, mais c'est Joseph-Louis Lagrange (1736-1813, né italien, naturalisé français) qui le démontra en 1770. Aujourd'hui, il porte le nom de théorème des quatre carrés de Lagrange.

²Bien que Pierre de Fermat (vers 1607-1665) ait indiqué, dans la marge de l'*Arithmetica* de Diophante, en avoir trouvé « une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir », il a fallu attendre les travaux d'Andrew Wiles pour que cet énoncé soit démontré.

Corrigé

1. Il existe au moins un élève de cette classe qui n'est pas une fille.
2. Il existe au moins un jour de la semaine où il n'a pas fait beau.
3. Toutes les copies de dissertation de philosophie comportent au moins une faute d'orthographe.

3 Négation avec formalisme

Donner la négation logique de chacune des assertions suivantes :

1. $x \in [-1, 2[$.
2. $\forall x \in E, x^2 \geq 5$ (où E est un ensemble de nombres réels).
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$.
4. $\exists T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$).
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \Rightarrow u_n \geq 10^4$ (où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite).
6. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 4 \leq u_n \leq 5$ (où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite).
7. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$ (où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite).
8. $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$).³

Corrigé

1. $x < -1$ ou $x \geq 2$.
2. $\exists x \in E, x^2 < 5$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x+1) \neq f(x)$.
4. $\forall T \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}, f(x+T) \neq f(x)$.
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 10$ et $u_n < 10^4$.
6. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n < 4$ ou $u_n > 5$.
7. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n| > \varepsilon$.
8. $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \delta$ et $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$.

4 Récurrence

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + n^2$ est pair.
2. Proposer une autre démonstration de ce résultat.

³C'est la définition de la continuité de f en 0. Nous verrons cela plus tard dans l'année.

Corrigé

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $n + n^2$ est pair ».
 - **Initialisation.** Pour $n = 0$, $0 + 0^2 = 0$ est pair, donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a $(n + 1) + (n + 1)^2 = n + n^2 + 2(n + 1)$. Par hypothèse de récurrence, $n + n^2$ est pair, et $2(n + 1)$ est pair. Ainsi, $(n + 1) + (n + 1)^2$ est pair, donc $P(n + 1)$ est vraie.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + n^2 = n(n + 1)$. Les entiers n et $n + 1$ étant consécutifs, l'un des deux est pair. Leur produit est donc pair.

5 Récurrence et terme général

- Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = n^2 + 1$.

- Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2. \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 6, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = (n + 1)3^n$.

Corrigé

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n = n^2 + 1$ ».
 - **Initialisation.** On a $u_0 = 1 = 0^2 + 1$, donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 1 + 2n + 1 = (n + 1)^2 + 1$, donc $P(n + 1)$ est vraie.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ».
 - **Initialisation.** On a $u_1 = 0$ et $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 2 = 2$. Ainsi, $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 4$, donc $P(1)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie. On a déjà $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. De plus, $u_{n+2} - u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_{n+1} \geq 0$, car $u_{n+1} \leq 4$. Ainsi, $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Enfin, $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 2 \leq 4$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n = (n + 1)3^n$ ».
 - **Initialisation.** On a $u_0 = 1 = (0 + 1)3^0$ et $u_1 = 6 = (1 + 1)3^1$. Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n + 1)$ vraies. Alors

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n = 6(n + 2)3^{n+1} - 9(n + 1)3^n = (n + 3)3^{n+2}.$$

Donc $P(n + 2)$ est vraie.

6 Inégalité de Bernoulli

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \ll \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx \gg$.

- **Initialisation.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $1+x \geq 0$, on a

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underset{P(n)}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

7 Disjonction de cas

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = k(n+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n+1 = 2(k+1)$, donc $\frac{n(n+1)}{2} = n(k+1) \in \mathbb{N}$.

8 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Corrigé

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut alors écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Ainsi, $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair. On en déduit que p est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.

On obtient alors $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair, donc q est pair. Les entiers p et q sont donc tous les deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

9 Écart entre trois réels

Soient x_0, x_1, x_2 trois réels de l'intervalle $[0; 1]$ tels que $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.

Montrer qu'au moins une des quantités $x_1 - x_0$ et $x_2 - x_1$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Corrigé

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $x_1 - x_0 > \frac{1}{2}$ et $x_2 - x_1 > \frac{1}{2}$. Alors $x_2 - x_0 = (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) > 1$.

Or $x_0, x_2 \in [0, 1]$, donc $x_2 - x_0 \leq 1$, ce qui est absurde.

10 Équations et inéquations

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 \geq 5$
2. $-(x+3)^2 \geq -4$
3. $x^2 > x$
4. $\frac{x+2}{-x+3} \geq 0$
5. $\frac{x+2}{x-3} \geq 1$
6. $\sqrt{x+2} = x$
7. $\sqrt{2x+3} = x-6$
8. $-\frac{1}{2}x+1 \leq \sqrt{x^2-x-2}$

Corrigé

1. On a $x^2 \geq 5 \iff |x| \geq \sqrt{5}$. Ainsi, $x \in]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$.
2. On a $-(x+3)^2 \geq -4 \iff (x+3)^2 \leq 4 \iff |x+3| \leq 2$. Ainsi, $x \in [-5, -1]$.
3. On a $x^2 > x \iff x(x-1) > 0$. Un tableau de signes donne $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
4. On étudie le signe de $\frac{x+2}{-x+3}$. Le numérateur s'annule en -2 et le dénominateur s'annule en 3 . Un tableau de signes donne $x \in [-2, 3[$.
5. On a $\frac{x+2}{x-3} \geq 1 \iff \frac{x+2}{x-3} - 1 \geq 0 \iff \frac{5}{x-3} \geq 0$. Ainsi, $x \in]3, +\infty[$.
6. L'équation n'a de sens que si $x+2 \geq 0$. De plus, puisque $\sqrt{x+2} \geq 0$, une éventuelle solution vérifie $x \geq 0$.
Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x+2} = x \iff x+2 = x^2 \iff (x-2)(x+1) = 0$. Seule la solution $x = 2$ convient. Ainsi, $\mathcal{S} = \{2\}$.
7. Puisque $\sqrt{2x+3} \geq 0$, une éventuelle solution vérifie $x-6 \geq 0$, donc $x \geq 6$.
Pour $x \geq 6$, $\sqrt{2x+3} = x-6 \iff 2x+3 = (x-6)^2 \iff x^2 - 14x + 33 = 0$. Les racines de ce trinôme sont 3 et 11 . Seule 11 vérifie $x \geq 6$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{11\}$.
8. L'inéquation n'a de sens que si $x^2 - x - 2 \geq 0$, soit $(x-2)(x+1) \geq 0$. Ainsi, $x \leq -1$ ou $x \geq 2$.
Si $x \geq 2$, alors $-\frac{1}{2}x+1 \leq 0$, tandis que $\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$. L'inégalité est donc toujours vérifiée.
Si $x \leq -1$, alors $-\frac{1}{2}x+1 > 0$. Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré : $\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2 \leq x^2 - x - 2 \iff \frac{x^2}{4} - x + 1 \leq x^2 - x - 2 \iff x^2 \geq 4$. Comme $x \leq -1$, cela équivaut à $x \leq -2$.
Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

11 Inégalité sur les racines carrées

Démontrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Corrigé

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Les deux membres étant positifs et la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \iff (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > a+b \iff a+b+2\sqrt{ab} > a+b$, qui est évidemment vraie.

12 Une égalité pour tout entier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = a) \iff a = b = 0$.

Corrigé

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = a$.

Pour $n = 0$, on obtient $a + b = a$, donc $b = 0$.

Pour $n = 1$, on obtient alors $2a = a$, donc $a = 0$.

Réciproquement, si $a = b = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a2^n + b3^n = 0 = a$.

13 Équivalence ?

1. Démontrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$.
2. L'implication réciproque est-elle également valable pour tous réels a, b, c, d ?
3. Que penser de l'affirmation suivante : $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a + c \leq b + d) \Rightarrow (a \leq b \text{ ou } c \leq d)$?

Corrigé

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. En additionnant les deux inégalités, on obtient $a + c \leq b + d$.
2. Non. Par exemple, pour $a = 1, b = 0, c = 0$ et $d = 2$, on a $a + c = 1 \leq 2 = b + d$, mais $a > b$.
3. L'affirmation est vraie. Raisonnons par contraposition. Si $a > b$ et $c > d$, alors, en additionnant ces deux inégalités, $a + c > b + d$.
Ainsi, $a + c \leq b + d$ implique nécessairement $a \leq b$ ou $c \leq d$.

14 Nul ?

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \iff a = 0$.

Corrigé

Supposons que $\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a > 0$. En choisissant $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, on obtient $a \leq \frac{a}{2}$, ce qui est absurde. Ainsi, $a = 0$.

Réciproquement, si $a = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $a = 0 \leq \varepsilon$.

15 Équation fonctionnelle

Démontrer que la fonction identité est la seule fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x$.

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $y = f(x)$. On suppose par l'absurde que $y \neq x$.

- **Cas 1 :** $y < x$. On a alors $f(y) = f(f(x)) = x$. Donc, $f(y) > f(x)$ mais $y < x$: contradiction avec la stricte croissance de f .
- **Cas 2 :** $y > x$. On a alors $f(y) = f(f(x)) = x$. Donc, $f(y) < f(x)$ mais $y > x$: contradiction avec la stricte croissance de f .

Donc, $y = x$. Donc, $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est l'identité.

• • • • 16 Équations fonctionnelles

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y-f(x)) = 2-x-y$.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x+y$.

Corrigé

1. On calcule en $x = 0$, et on trouve $f(0) = 1$. On calcule ensuite en $x = 1$, et on trouve $f(1) = 1$. On conjecture que la solution est $f = 1$. Pour ce faire, on évalue la relation en $1-x$, ce qui donne

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x \iff f(1-x) = 2-x - (1-x)f(x).$$

En injectant cela dans l'équation initiale, on obtient

$$f(x) + x(2-x - (1-x)f(x)) - 1 - x = 0 \iff f(x)(x^2-x+1) - (x^2-x+1) = 0 \iff (x^2-x+1)(f(x)-1) = 0.$$

Le polynôme étant toujours strictement positif puisque son discriminant est strictement négatif, on en déduit que $f = 1$.

2. En évaluant en $y = f(x)$, on obtient $f(0) = 2-x-f(x)$, soit $f(x) = 2-x-f(0)$. Ainsi, pour $y, x \in \mathbb{R}$, $f(y-f(x)) = 2-y+f(x)-f(0) = 2-y+2-x-f(0)-f(0) = 4-x-y-2f(0)$. Ainsi, nécessairement, $f(0) = 1$, et il est donc nécessaire que $f(x) = 1-x$.

On vérifie que cette solution fonctionne, et elle est donc unique.

3. En $y = x = 0$, on obtient $f(0)f(0) - f(0) = 0$. On distingue donc deux cas :
 - **Cas 1 :** $f(0) = 0$. Alors, en évaluant en $y = 0$ et $x = 1$, on obtient $f(1)0 - 0 = 1$: impossible.
 - **Cas 2 :** $f(0) = 1$. Alors, en évaluant en $y = 0$, l'équation devient $f(x) - 1 = x$, soit $f(x) = 1+x$.

On vérifie que $f(x) = 1+x$ fonctionne bien. C'est donc l'unique solution.