

1 Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
4. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x - 6)$
5. $f : x \mapsto \ln(x + 3) - \ln(2x + 1)$
6. $f : x \mapsto \sqrt{x^3 + x^2 + x}$
7. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x + 1}{-x + 4}}$
8. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$
9. $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$
10. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x + 1)}$

Corrigé

1. f est définie lorsque le dénominateur est non nul, soit lorsque $x \neq \pm 1$. Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. $x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x - 1)(x + 3) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -3$. Donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.
3. $x^2 + 2x - 3 \geq 0 \iff (x - 1)(x + 3) \geq 0$. Donc, $D_f =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.
4. f est définie lorsque $x^2 - 5x - 6 > 0$, soit lorsque $(x - 6)(x + 1) > 0$. Donc, $D_f =]-\infty, -1[\cup]6, +\infty[$.
5. f est définie lorsque $x + 3 > 0$ et $2x + 1 > 0$, soit lorsque $x > -3$ et $x > -\frac{1}{2}$. Donc, $D_f =]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
6. On a $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$. Or, le trinôme $x^2 + x + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ car son discriminant vaut -3 . Ainsi, $x^3 + x^2 + x \geq 0 \iff x \geq 0$. Donc, $D_f = [0, +\infty[$.
7. f est définie lorsque $\frac{2x + 1}{-x + 4} \geq 0$, avec $x \neq 4$. Un tableau de signes donne $-\frac{1}{2} \leq x < 4$. Donc, $D_f = [-\frac{1}{2}, 4[$.
8. f est définie lorsque $x > 0$ et $\ln(x) - 1 \neq 0$. Or, $\ln(x) - 1 = 0 \iff x = e$. Donc, $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$.
9. Or, $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$. Donc, $D_f =]0, +\infty[$.
10. f est définie lorsque $x + 1 > 0$ et $\ln(x + 1) \neq 0$. Or, $\ln(x + 1) = 0 \iff x + 1 = 1 \iff x = 0$. Donc, $D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

2 Parité et imparité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f .

- 1.a) $f : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$
- 1.b) $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$
- 1.c) $f : x \mapsto e^{x^2}$
- 1.d) $f : x \mapsto \frac{x - 1}{x^2 + 1}$
- 1.e) $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$
- 1.f) $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$
- 1.g) $f : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$
- 1.h) $f : x \mapsto x^2 \ln(|x|)$

2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

Même question avec le produit de deux fonctions.

3. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

Corrigé

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^4 + 1} = -\frac{x}{x^4 + 1} = -f(x)$. Donc, f est impaire.
 - (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$. Donc, f est paire.
 - (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$. Donc, f est paire.
 - (d) $f(1) = 0 \neq -\frac{2}{3} = f(-1)$. Donc, f n'est ni paire ni impaire.
 - (e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$. Donc, f est impaire.
 - (f) On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$, qui n'est pas symétrique par rapport à 0. Donc, f n'est ni paire ni impaire.
 - (g) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{-x} = -x^3 - \frac{1}{x} = -f(x)$. Donc, f est impaire.
 - (h) On a $D_f = \mathbb{R}^*$, qui est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(-x) = (-x)^2 \ln(|-x|) = x^2 \ln(|x|) = f(x)$. Donc, f est paire.
2. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble symétrique par rapport à 0.
- On suppose que f et g sont paires. Alors, pour tout x de leur ensemble de définition, $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$. La somme de deux fonctions paires est donc paire.
 - On suppose que f et g sont impaires. Alors, pour tout x de leur ensemble de définition, $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$. La somme de deux fonctions impaires est donc impaire.
 - La somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire n'est, en général, ni paire ni impaire. Par exemple, les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$ sont respectivement paire et impaire. Or, en posant $h = f + g$, on a $h(x) = x^2 + x$, puis $h(-1) = 0$, tandis que $h(1) = 2$. Ainsi, $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$. Donc, h n'est ni paire ni impaire.
 - On suppose que f et g sont paires. Alors, pour tout x de leur ensemble de définition, $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$. Le produit de deux fonctions paires est donc pair.
 - On suppose que f et g sont impaires. Alors, pour tout x de leur ensemble de définition, $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x)$. Le produit de deux fonctions impaires est donc pair.
 - On suppose que f est paire et que g est impaire. Alors, pour tout x de leur ensemble de définition, $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x)$. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est donc impair.
3. Soit f une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées a et $-a$.
Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda(x-a)(x+a) = \lambda(x^2 - a^2)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \lambda((-x)^2 - a^2) = \lambda(x^2 - a^2) = f(x)$. Donc, f est paire.

3 Vrai ou faux sur la parité

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$, alors f est paire.
2. Si f est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.
3. Si f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors f ne peut pas être paire.

Corrigé

1. Non. Par exemple, la fonction $f(x) = x(x-1)(x+1)$ est impaire, n'est pas paire car $f(-2) = -6 \neq 6 = f(2)$, mais $f(-1) = 0 = f(1)$.
2. Non. Par exemple, la fonction nulle est impaire et vérifie $f(-2) = f(2)$.
3. Oui. C'est même vrai pour tout x !
4. Non. Par exemple, la fonction carrée est paire, et $f(0) = -f(0)$.

4 Variations

Soient deux fonctions f et g définies sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et de même monotonie.

1. Démontrer que $f + g$ a la même monotonie que f et g .
2. On suppose que f est strictement monotone. Démontrer que $f + g$ est strictement monotone.

Corrigé

On suppose que f et g sont croissantes, l'autre cas étant similaire.

1. Soient $x, y \in I$ tels que $x \leq y$. Comme f et g sont croissantes, on a $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$. En sommant ces deux inégalités, on obtient $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$. Ainsi, $f + g$ est croissante.
2. On suppose désormais que f est strictement croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Alors $f(x) < f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$. En additionnant ces deux inégalités, on obtient $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$. Ainsi, $f + g$ est strictement croissante.

5 Variations et équivalence

1. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir :

$$\forall a, b \in I, \quad f(a) = f(b) \implies a = b.$$

2. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir :

$$\forall a, b \in I, \quad f(a) \leq f(b) \iff a \leq b.$$

3. Le résultat précédent est-il encore vrai si la croissance de f n'est pas stricte ?

Corrigé

1. Soient $a, b \in I$ tels que $f(a) = f(b)$. Supposons par l'absurde que $a \neq b$.
Si $a < b$, puisque f est strictement croissante, on a $f(a) < f(b)$, ce qui est impossible.
De même, si $b < a$, on a $f(b) < f(a)$, ce qui est impossible.
Donc, $a = b$.
2. On procède par double implication. Soient $a, b \in I$.
 $\Leftarrow$ Si $a \leq b$, alors, puisque f est croissante, $f(a) \leq f(b)$.
 $\Rightarrow$ Supposons que $f(a) \leq f(b)$. Si $a > b$, alors, puisque f est strictement croissante, on aurait $f(a) > f(b)$, ce qui est impossible. Donc, $a \leq b$.
3. Le résultat n'est plus vrai si la croissance de f n'est pas stricte.
Par exemple, la fonction nulle $f : x \mapsto 0$ est croissante sur $\mathbb{R}$. On a $f(1) \leq f(0)$, mais $1 \leq 0$ est faux.

6 Propriétés sur exp et ln

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les nombres $\ln(8)$, $\ln(\sqrt{2})$, $\ln(6) - \ln(3)$ et $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier les expressions suivantes sur leur ensemble de définition :

2.a) $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$

2.b) $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

2.c) $e^{2 \ln x}$

2.d) $-\ln(2x) - \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.e) $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2.f) $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

2.g) $\ln(e^2 \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

2.h) $\frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$

2.i) $\sqrt{e^{2x} e^{-x}}$

2.j) $\frac{e^{x^2-2x} \cdot (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

Corrigé

1. Par propriété du logarithme, $\ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln(2)$, $\ln(\sqrt{2}) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln(2)$,

$$\ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln(2) \text{ et } \ln(2e^2) = \ln(2) + \ln(e^2) = \ln(2) + 2.$$

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2} = e^{-1}$.

(c) L'expression est définie pour $x > 0$. Dans ce cas, $e^{2 \ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$.

(d) Pour $x > 0$, $-\ln(2x) - \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(2) - 4 \ln(x)$.

(e) On a $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \ln\left((\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})\right) = \ln(1) = 0$.

(f) $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e}) = 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

(g) $\ln(e^2 \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.

(h) $\frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)} = \frac{5}{3}$.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{e^{2x} e^{-x}} = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$.

(j) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{x^2-2x} (e^x)^2}{(e^{2x})^3} = \frac{e^{x^2}}{e^{6x}} = e^{x^2-6x}$.

7 Irrationnel

Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un irrationnel.

Corrigé

Par l'absurde, on suppose qu'il existe p et q premiers entre eux tels que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q}$, donc $q \ln(2) = p \ln(3)$.
Donc, par passage à l'exponentiel, $2^q = 3^p$. Donc, puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, $p = q = 0$. Ce n'est pas possible.

8 Résolution d'équations avec les fonctions usuelles

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\ln(1 + e^x) = 2$
2. $(1 + \ln(x))^2 = 4$
3. $\sqrt{1 - \ln(x)} = 5$
4. $|\ln(x)| = 1$
5. $|e^x| = 1$
6. $|x + 3| = -1$
7. $|x + 5| = |2x - 7|$
8. $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$
9. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$
10. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$
11. $(\ln(x))^2 - 3\ln x + 2 = 0$
12. $e^{2x} = 2e^x - 1$
13. $e^x + e^{-x} = 2$

Corrigé

1. $\ln(1 + e^x) = 2 \iff 1 + e^x = e^2 \iff e^x = e^2 - 1 \iff x = \ln(e^2 - 1)$.
2. L'équation est définie pour $x > 0$. On a $(1 + \ln(x))^2 = 4 \iff 1 + \ln(x) = 2$ ou $1 + \ln(x) = -2 \iff \ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = -3 \iff x = e$ ou $x = e^{-3}$.
3. L'équation est définie pour $x > 0$. On a $\sqrt{1 - \ln(x)} = 5 \iff 1 - \ln(x) = 25 \iff \ln(x) = -24 \iff x = e^{-24}$.
4. L'équation est définie pour $e > x > 0$. On a $|\ln(x)| = 1 \iff \ln(x) = 1$ ou $-1 \iff x = e$ ou e^{-1} .
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. Ainsi, $|e^x| = 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x + 3| \geq 0$. L'équation $|x + 3| = -1$ n'admet donc aucune solution.
7. On a $|x + 5| = |2x - 7| \iff x + 5 = 2x - 7$ ou $x + 5 = -(2x - 7)$.
Or, $x + 5 = 2x - 7 \iff x = 12$ et $x + 5 = -2x + 7 \iff x = \frac{2}{3}$.
Donc, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{2}{3}, 12\right\}$.
8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est un entier. Comme $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, l'équation n'admet aucune solution.
9. Par définition de la partie entière, $\lfloor x^2 \rfloor = 9 \iff 9 \leq x^2 < 10 \iff 3 \leq |x| < \sqrt{10}$.
Donc, l'ensemble des solutions est $] -\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10}[$.
10. On pose $X = x^2$. On a alors $X \geq 0$ et
$$2x^4 + x^2 - 1 = 0 \iff 2X^2 + X - 1 = 0 \iff (2X - 1)(X + 1) = 0.$$

Ainsi, $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -1$. Comme $X \geq 0$, on retient uniquement $X = \frac{1}{2}$. Donc, $x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
11. L'équation est définie pour $x > 0$. On pose $X = \ln(x)$. On a
$$(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \iff X^2 - 3X + 2 = 0 \iff (X - 1)(X - 2) = 0.$$

Ainsi, $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = 2$, donc $x = e$ ou $x = e^2$.
12. On a $e^{2x} = 2e^x - 1 \iff e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \iff (e^x - 1)^2 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$.
13. Comme $e^x \neq 0$, on peut multiplier l'équation par e^x : $e^x + e^{-x} = 2 \iff e^{2x} + 1 = 2e^x \iff (e^x - 1)^2 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$.

9 Résolution d'inéquations avec les fonctions usuelles

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x + 5| < 3$
2. $|x - 2| \leq 0$
3. $|2x - 1| \leq 4$
4. $|9 - x^2| \leq -2$
5. $5 - x^2 < 0$
6. $\ln(10 - x^2) > 0$
7. $0,5^x < 0,1$
8. $e^{2x-1} \geq 1$
9. $\frac{1}{e^x + 1} < 2$
10. $2^x \leq 3$

Corrigé

1. On a $|x + 5| < 3 \iff -3 < x + 5 < 3 \iff -8 < x < -2$.
2. Comme $|x - 2| \geq 0$, on a $|x - 2| \leq 0 \iff |x - 2| = 0 \iff x = 2$.
3. On a $|2x - 1| \leq 4 \iff -4 \leq 2x - 1 \leq 4 \iff -3 \leq 2x \leq 5 \iff -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|9 - x^2| \geq 0$. L'inéquation $|9 - x^2| \leq -2$ n'admet donc aucune solution.
5. On a $5 - x^2 < 0 \iff x^2 > 5 \iff x < -\sqrt{5}$ ou $x > \sqrt{5}$.
6. On a $\ln(10 - x^2) > 0 \iff 10 - x^2 > 1 \iff x^2 < 9 \iff -3 < x < 3$.
7. On a $0,5^x < 0,1 \iff x \ln(0,5) < \ln(0,1)$. Comme $\ln(0,5) < 0$, on obtient $x > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,5)} = \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$.
8. La fonction exponentielle étant strictement croissante,
$$e^{2x-1} \geq 1 \iff e^{2x-1} \geq e^0 \iff 2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}.$$
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 1$. Ainsi, $0 < \frac{1}{e^x + 1} < 1 < 2$.
L'inéquation est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
10. Par propriété de l'exponentielle, $2^x \leq 3 \iff e^{x \ln(2)} \leq 3 \iff x \leq \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

10 Fonction partie fractionnaire

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - [x]$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2,5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0, 1[$, simplifier l'expression de $f(x)$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f .

Corrigé

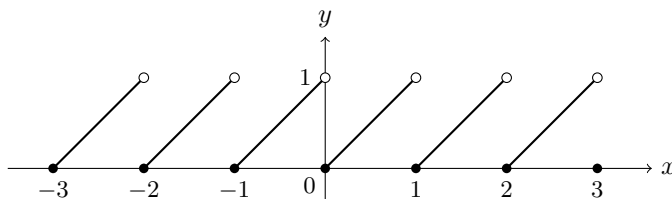
1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a $\lfloor x \rfloor = x$, donc $f(x) = x - \lfloor x \rfloor = 0$.
2. On a $f(2,5) = 2,5 - \lfloor 2,5 \rfloor = 2,5 - 2 = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.
3. Soit $x \in [0, 1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$, donc $f(x) = x$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi,

$$f(x+1) = x+1 - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

La fonction f est donc 1-périodique.

5. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = k$, donc $f(x) = x - k$.

La courbe représentative de f est donc constituée de segments de droite de pente 1.



11 Calculs de dérivées

Trouver l'ensemble de dérivabilité des fonctions ci-dessous, puis déterminer leur dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{5}{x^7}$
3. $f_3 : x \mapsto x \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f_7 : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f_8 : x \mapsto \sqrt{xe^x}$ sur $]0; +\infty[$
9. $f_9 : x \mapsto (\ln(1+x))^4$ sur $] -1, +\infty[$
10. $f_{10} : x \mapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Corrigé

1. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_1'(x) = -\frac{2}{x^3}$.
2. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_2'(x) = -\frac{35}{x^8}$.
3. f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f_3'(x) = \ln(x) + 1$.
4. f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = \frac{1-x}{e^x}$.
5. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
6. f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_6'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. f_7 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_7(x) = -2xe^{-x^2}$.
8. f_8 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f'_8(x) = \frac{(x+1)e^x}{2\sqrt{xe^x}}$.
9. f_9 est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$, $f'_9(x) = \frac{4(\ln(1+x))^3}{1+x}$.
10. f_{10} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_{10}(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.

12 Étude de fonctions

Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

1. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$

2. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2}$

3. $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

4. $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$

5. $f : x \mapsto \frac{3+x}{x^3}$

6. $f : x \mapsto x^2 - x$

7. $f : x \mapsto x \ln(x) - x$

8. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$

9. $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

10. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

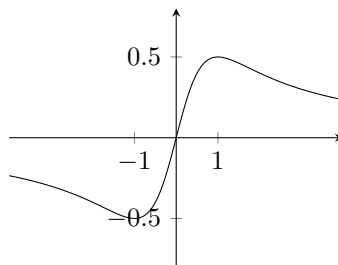
11. $f : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

12. $f : x \mapsto x \ln(x)$

Corrigé

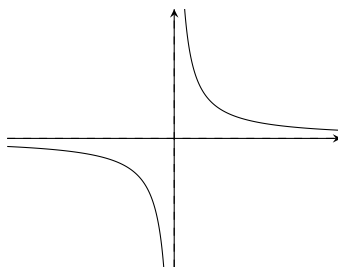
1. On a $D_f = \mathbb{R}$, f est impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



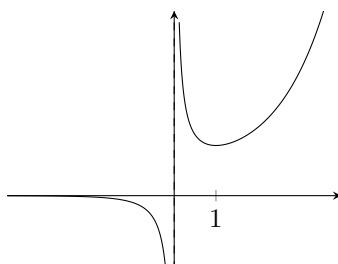
2. On a $D_f = \mathbb{R}^*$, f est impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0	



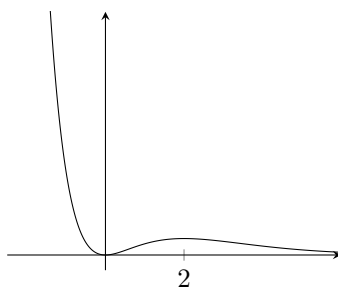
3. On a $D_f = \mathbb{R}^*$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0		$+\infty$		$+\infty$
		$-\infty$	e		



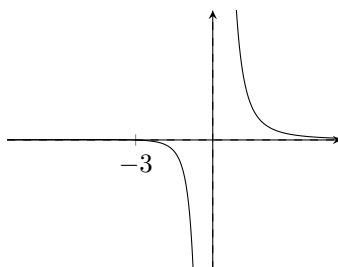
4. On a $D_f = \mathbb{R}$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e^2}$	0



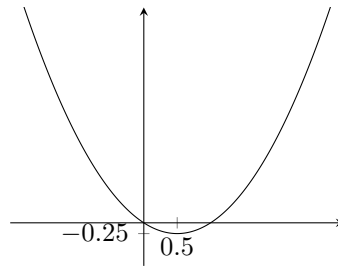
5. On a $D_f = \mathbb{R}^*$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{2x+9}{x^4}$.

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\frac{4}{243}$	$-\infty$	0



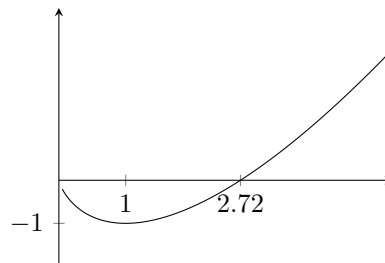
6. On a $D_f = \mathbb{R}$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$



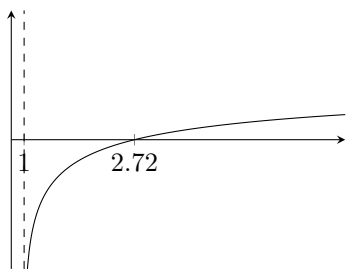
7. On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$



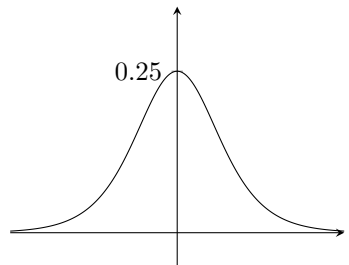
8. On a $D_f =]1, +\infty[$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



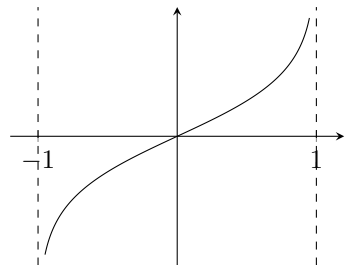
9. On a $D_f = \mathbb{R}$, f est paire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{4} \searrow 0$		



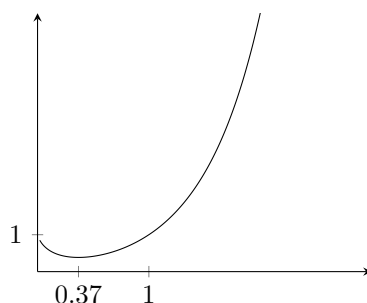
10. On a $D_f =]-1, 1[$, f est impaire et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{2}{1 - x^2}$.

x	-1	0	1
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0 \longrightarrow +\infty$		



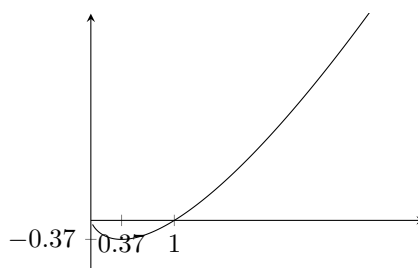
11. On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$e^{-1/e}$	$+\infty$



12. On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f n'est ni paire ni impaire et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) + 1$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$



13 Étude de deux fonctions

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x) - x + 1$

1. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = g(x)$.
3. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ (limite usuelle), $g(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (par croissance comparée).
Ainsi,

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

En particulier, pour tout $x > 0$, $g(x) \leq 0$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -x + \ln(x) + 1 = g(x)$.
3. D'après la question 1, $g(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$, avec $g(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (croissance comparée), $f(1) = -\frac{1}{2}$ et, en factorisant, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{1}{2}x + \ln(x) \right) = -\infty$ (croissance comparée + produit de limites usuelles). Ainsi,

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

Donc, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

14 Étude d'une fonction rationnelle

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{x^3 + 4}{x - 1} \quad \text{et } C_f \text{ sa courbe représentative.}$$

- Étudier la parité de f .
- Déterminer la dérivée de f .
- On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.
3.a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

- 3.b) Calculer $g(2)$, puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (*Les limites de f ne sont pas demandées.*)
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0, notée T_0 .
Identifier la position relative de C_f par rapport à T_0 .
6. Représenter l'allure de C_f dans un repère du plan judicieusement choisi.

Corrigé

1. On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, qui n'est pas symétrique par rapport à 0. Ainsi, f n'est ni paire ni impaire.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $x \neq 1$ et avec g défini à la question suivante,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - (x^3+4)}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}.$$

3. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.
De plus, $g(0) = -4$ et $g(1) = -5$. Ainsi,

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-4	-5	$+\infty$	

- (b) On a $g(2) = 0$. D'après le tableau de variations précédent, 2 est l'unique racine de g . Ainsi,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

4. Comme $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$. De plus, $f(2) = 12$. Ainsi,

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$			12	

5. On a $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$. Ainsi, l'équation de la tangente T_0 est
 $T_0 : y = f(0) + f'(0)(x-0) = -4x - 4$.

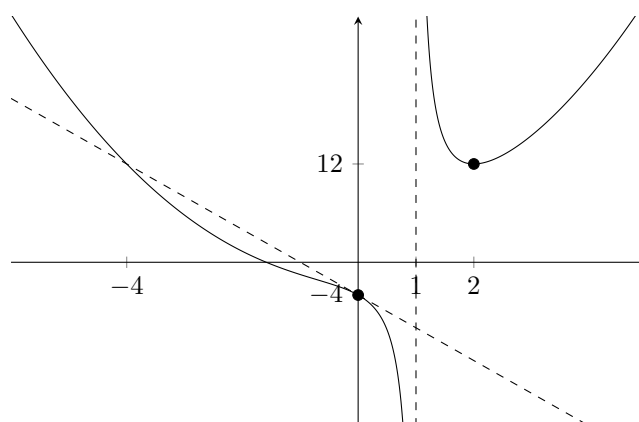
Pour tout $x \neq 1$, $f(x) - T_0(x) = \frac{x^3 + 4}{x - 1} + 4x + 4 = \frac{x^2(x + 4)}{x - 1}$.

Comme $x^2 \geq 0$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
$f(x) - (-4x - 4)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Ainsi, C_f est au-dessus de T_0 sur $] -\infty, -4[\cup]1, +\infty[$ et en dessous sur $] -4, 0[\cup]0, 1[$. Les deux courbes se coupent pour $x = -4$ et $x = 0$.

6. Pour le tracé, on peut remarquer que $f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{5}{x - 1}$.



15 Manipuler les inégalités

- Démontrer : $\forall n \in [2; +\infty[\cap \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$
- Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \geq \sqrt{\frac{3}{x+5}}$.
- Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 2^{x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
- Démontrer : $\forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq x^2 + x \leq 2$.
- Encadrer les expressions suivantes sur les intervalles donnés :
 - x^2 sur $[-3; 1]$
 - $e^{(1-x)^2}$ sur $[2; 4]$

Corrigé

- Soit $n \in [2, +\infty[\cap \mathbb{N}$. On a $n(n-1) \leq n^2 \leq n(n+1)$.

Les trois termes étant strictement positifs, en passant à l'inverse, $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a $x + 2 \leq x + 5$, donc $\sqrt{x + 2} \leq \sqrt{x + 5}$.

Les deux termes étant strictement positifs, en passant à l'inverse puis en multipliant par $\sqrt{3} > 0$, on obtient $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+5}} = \sqrt{\frac{3}{x+5}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme $\ln(2) \leq 1$ et $x + 1 \leq (x + 1)^2$, on a $(x + 1) \ln(2) \leq (x + 1)^2$.

La fonction exponentielle étant croissante, $2^{x+1} = e^{(x+1) \ln(2)} \leq e^{(x+1)^2}$.

4. Soit $x \in [0, 1[$. On a $0 \leq x < 1$, donc $0 \leq x^2 < 1$. Ainsi, $0 \leq x^2 + x < 2$, et donc $0 \leq x^2 + x \leq 2$.

5. (a) Soit $x \in [-3, 1]$. On a $|x| \leq 3$, donc

$$0 \leq x^2 \leq 9.$$

(b) Soit $x \in [2, 4]$. On a $-3 \leq 1 - x \leq -1$, donc $1 \leq (1 - x)^2 \leq 9$.

La fonction exponentielle étant croissante, $e \leq e^{(1-x)^2} \leq e^9$.

16 Maximum sur les entiers

On dit qu'un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ admet un maximum, noté $\max(I)$, s'il existe $x \in I$ tel que, pour tout $y \in I$, $x \geq y$. Justifier l'existence et calculer la valeur de : $\max_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)$.

On donne $\ln(2) \simeq 0,693$ et $\ln(3) \simeq 1,099$.

Corrigé

On pose $f : x \rightarrow \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)$. On remarque que la suite vaut $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. On étudie la fonction, et il vient que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions usuelles, et $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)$. Donc, f atteint son maximum global en $x = e \simeq 2.7$. Donc, la suite atteint son maximum en $n = 2$ ou $n = 3$. On voit que $\sqrt{2} \sim \exp(0.35)$ et $\sqrt[3]{3} \sim \exp(0.366)$. Donc, son maximum est atteint en $n = 3$.

17 Logarithme et moyenne

Démontrer que pour tous $x, y > 0$, $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$

Corrigé

Soient $x, y > 0$. On a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, donc $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, soit $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

La fonction $\ln$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \ln(\sqrt{xy}) = \frac{1}{2} \ln(xy) = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$.

Seconde méthode : étude de fonction Si on ne pense pas à cette astuce, poser, à y fixé, $f : x \rightarrow \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$ et le dériver donne que le minimum est atteint en $x = y$, et $f(y) = 0$. Donc, la fonction est positive et l'inégalité recherchée est prouvée.

18 Décomposition d'une fonction

Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Corrigé

- **Analyse.** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $f = p + i$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = p(x) + i(x)$ et, par parité de p et imparité de i , $f(-x) = p(x) - i(x)$. En additionnant puis en soustrayant ces deux égalités, on obtient nécessairement

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

- **Synthèse.** On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$, donc p est paire, et $i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$, donc i est impaire.

Enfin, $p(x) + i(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après l'analyse, cette décomposition est unique.

19 DS 2024

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 qu'on précisera.
 - (b) Vérifier que les réels x_1 et x_2 sont strictement positifs.
2.
 - (a) En posant $y = e^x$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 7e^x + 1 = 0$. On exprimera les solutions en fonction de x_1 et x_2 .
 - (b) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $e^{2x} - 7e^x + 1 > 0$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. L'objectif est de calculer le rapport $x = \frac{a}{b}$.
 - (a) Montrer que $\ln\left(\frac{b(x+1)}{3}\right) = \ln(b\sqrt{x})$
 - (b) En déduire les valeurs possibles de x .

Corrigé

1.
 - (a) Le discriminant de ce polynôme vaut $(-7)^2 - 4 = 45 > 0$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.
 - (b) On a clairement $x_2 > 0$. De plus, $7 > 3\sqrt{5}$ car $49 > 45$, donc $x_1 > 0$.
2.
 - (a) On pose $y = e^x > 0$. On a $e^{2x} - 7e^x + 1 = 0 \iff y^2 - 7y + 1 = 0 \iff y = x_1$ ou $y = x_2$. Comme $x_1, x_2 > 0$, on obtient $x = \ln(x_1)$ ou $x = \ln(x_2)$.
 - (b) On pose de nouveau $y = e^x > 0$.
D'après la question précédente, $y^2 - 7y + 1 > 0 \iff y < x_1$ ou $y > x_2$.
Par stricte croissance de l'exponentielle, $e^x < x_1$ ou $e^x > x_2 \iff x < \ln(x_1)$ ou $x > \ln(x_2)$.
3. On pose $x = \frac{a}{b} > 0$, donc $a = bx$.

- (a) On a $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\left(\frac{b(x+1)}{3}\right)$.
 De plus, $\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) = \frac{1}{2}(\ln(bx) + \ln(b)) = \ln(b) + \frac{1}{2}\ln(x) = \ln(b\sqrt{x})$.
 Ainsi, $\ln\left(\frac{b(x+1)}{3}\right) = \ln(b\sqrt{x})$.
- (b) En appliquant la fonction exponentielle à l'égalité ci-dessus, on obtient
 $\frac{b(x+1)}{3} = b\sqrt{x} \iff x+1 = 3\sqrt{x}$. On pose $y = \sqrt{x} > 0$. Alors,
 $y^2 - 3y + 1 = 0 \iff y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
 Donc, $x = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2$ ou $x = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$, soit $x = x_1$ ou $x = x_2$.

• • • • 20 Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

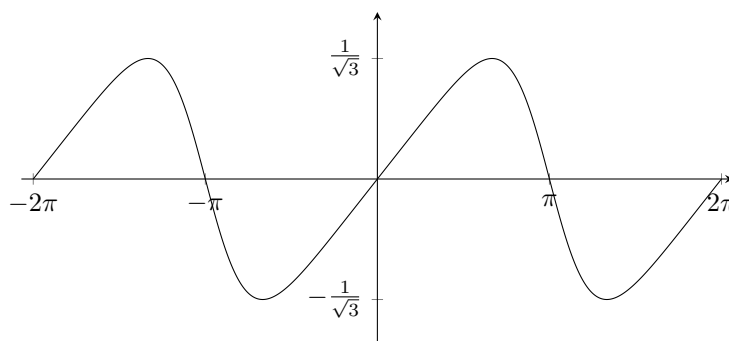
- Déterminer le domaine de définition de f . Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x + 2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ? En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour construire toute la courbe représentative de f .
- Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$.
- Étudier le signe de $1 + 2\cos x$ sur $[0, \pi]$.
- Établir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
- Tracer la courbe représentative de f .

Corrigé

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $2 + \cos(x) \geq 1 > 0$. Ainsi, $D_f = \mathbb{R}$.
 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} = f(x)$, donc f est 2π -périodique. De plus, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} = -f(x)$, donc f est impaire.
 Il suffit donc d'étudier f sur $[0, \pi]$: par symétrie centrale par rapport à l'origine, on obtient la courbe sur $[-\pi, 0]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$, $f'(x) = \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{1 + 2\cos(x)}{(2 + \cos(x))^2}$.
- Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $1 + 2\cos(x) \geq 0 \iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2} \iff x \leq \frac{2\pi}{3}$.
 Ainsi, $1 + 2\cos(x)$ est positif sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, nul en $\frac{2\pi}{3}$, puis négatif sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.
- On a $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

6. En utilisant l'imparité et la périodicité de f , on obtient l'allure suivante :



21 Étude d'une fonction cosinus

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

- Déterminer une période T de f .
- Déterminer en quels points f atteint son maximum, son minimum, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-T, T]$.
- f est-elle paire ? impaire ?

Corrigé

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$. Donc, $T = \frac{4\pi}{3}$ est une période de f .

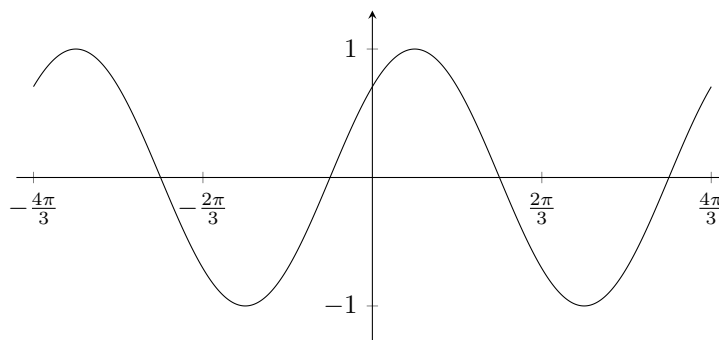
N.B. : On a utilisé que, si f est de période T , alors $x \rightarrow f(ax)$ est de période $T/|a|$ pour $a \neq 0$, avec $a = \frac{3}{2}$ ici, et $T = 2\pi$.

- La fonction f atteint son maximum 1 lorsque $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Elle atteint son minimum -1 lorsque $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \iff x = \frac{5\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Enfin, $f(x) = 0 \iff \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- La courbe sur $[-T, T] = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ est la suivante :



4. On a $f(0) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, donc f n'est pas impaire.
De plus, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ et $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$, donc f n'est pas paire.

22 Identités trigonométriques et tangente

- Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.
- Quelle inégalité peut-on en déduire pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$?
- Déterminer la valeur de $\tan(\frac{\pi}{6})$ et $\tan(\frac{\pi}{3})$.
- Soient $a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
 - Montrer que $\tan(a)\tan(b) = 1$ si et seulement si $a + b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.
 - Montrer que si $a + b \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.
 - En déduire la valeur de $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Corrigé

- On pose, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \tan(x) - x$.
La fonction f est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$.
Ainsi, f est croissante et, comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,
$$\tan(x) \geq x.$$
- Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$. Alors $-x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\tan(-x) \geq -x$.
Comme la fonction tangente est impaire, $-\tan(x) \geq -x$, soit $\tan(x) \leq x$.
- On a $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}$.
- On a, pour $a, b \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(a)\tan(b) = 1 \iff \sin(a)\sin(b) = \cos(a)\cos(b) \iff \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = 0 \iff \cos(a+b) = 0 \iff a+b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a+b = \frac{\pi}{2}$.
 - On suppose $a+b \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. D'après la question précédente, $1 - \tan(a)\tan(b) \neq 0$. Ainsi, en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$ pour la dernière égalité,

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

(c) On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$. Ainsi, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$.

Exercices sur la fonction partie entière

• • • • 23 Identité sur la partie entière

Démontrer que, pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Indication : distinguer les cas $x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}[$ et $x \in [\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1[$.

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $n = \lfloor x \rfloor$.

- Si $x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right[$, alors $x + \frac{1}{2} \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[$ et $2x \in [2n, 2n + 1[$.

$$\text{Ainsi, } \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor = n + n = 2n = \lfloor 2x \rfloor.$$

- Si $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right[$, alors $x + \frac{1}{2} \in [n + 1, n + \frac{3}{2}[$ et $2x \in [2n + 1, 2n + 2[$.

$$\text{Ainsi, } \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor = n + (n + 1) = 2n + 1 = \lfloor 2x \rfloor.$$

• • • • 24 Partie entière d'une racine

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer $\left\lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 4} \right\rfloor$.

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4 < (n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$.

Ainsi, $n + 1 < \sqrt{n^2 + 3n + 4} < n + 2$, donc $\left\lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 4} \right\rfloor = n + 1$.

• • • • 25 Partie entière

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Indication : On pourra écrire $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in [0, 1[$.

2. Soient $h : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ et $g : x \mapsto |2x - 1|$. Montrer que la fonction $f = g \circ h$ est paire et périodique.

Corrigé

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in [0, 1[$.
 - Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\varepsilon = 0$, donc $\lfloor -x \rfloor = -x$.
 - Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $\varepsilon \in]0, 1[$ et $-x = -\lfloor x \rfloor - \varepsilon \in]-\lfloor x \rfloor - 1, -\lfloor x \rfloor[$. Donc, $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.
2. On remarque d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x+1) = x+1 - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 = h(x)$. Ainsi, h est 1-périodique, donc $f = g \circ h$ est également 1-périodique.
Montrons maintenant que f est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $h(x) = h(-x) = 0$, donc $f(-x) = f(x) = 1$.
Si $x \notin \mathbb{Z}$, d'après la question précédente, $h(-x) = -x - \lfloor -x \rfloor = -x + \lfloor x \rfloor + 1 = 1 - h(x)$.
Donc, $f(-x) = |2h(-x) - 1| = |2(1 - h(x)) - 1| = |1 - 2h(x)| = f(x)$. Donc f est paire.

26 Inégalité sur la partie entière

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Indication : On pourra écrire $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in [0, 1[$, et distinguer selon que $\varepsilon \in [0, 1/2[$ ou que $\varepsilon \in [1/2, 1[$, et faire de même pour y .

Corrigé

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ et $y = \lfloor y \rfloor + \eta$, avec $\varepsilon, \eta \in [0, 1[$.

On a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \varepsilon + \eta \rfloor$, puis $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\varepsilon \rfloor$ et $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2\eta \rfloor$.

Il suffit donc de montrer que

$$\lfloor \varepsilon + \eta \rfloor \leq \lfloor 2\varepsilon \rfloor + \lfloor 2\eta \rfloor.$$

On distingue trois cas.

- Si $\varepsilon, \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $\varepsilon + \eta < 1$, donc $\lfloor \varepsilon + \eta \rfloor = 0 = \lfloor 2\varepsilon \rfloor + \lfloor 2\eta \rfloor$.
- Si l'un des deux réels ε ou η appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $\lfloor 2\varepsilon \rfloor + \lfloor 2\eta \rfloor \geq 1$.
Or, $\varepsilon + \eta < 2$, donc $\lfloor \varepsilon + \eta \rfloor \leq 1$.

27 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, & n &\mapsto 2n, & f_2 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, & n &\mapsto -n, \\ f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto x^2, & f_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+, & x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Corrigé

1. La fonction f_1 est injective. En effet, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, $f_1(n) = f_1(m) \implies 2n = 2m \implies n = m$.
Elle n'est pas surjective car 1 n'admet aucun antécédent. Ainsi, f_1 n'est pas bijective.
2. La fonction f_2 est injective. En effet, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, $f_2(n) = f_2(m) \implies -n = -m \implies n = m$.
Elle est surjective car, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f_2(-p) = p$. Ainsi, f_2 est bijective.

3. La fonction f_3 n'est pas injective car $f_3(-1) = f_3(1) = 1$.

Elle n'est pas surjective car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$: le réel -1 n'admet donc aucun antécédent. Ainsi, f_3 n'est pas bijective.

4. La fonction f_4 n'est pas injective car $f_4(-1) = f_4(1) = 1$.

Elle est surjective car, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a $f_4(\sqrt{y}) = y$. Ainsi, f_4 n'est pas bijective.

28 Compositions et bijectivité

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

2. Les fonctions f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Corrigé

1. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $2x$ est pair, donc $(g \circ f)(x) = g(2x) = x$.

$$\text{De plus, } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

2. La fonction f est injective car $f(x) = f(y) \implies 2x = 2y \implies x = y$.

Elle n'est pas surjective car 1 n'admet aucun antécédent. Ainsi, f n'est pas bijective.

La fonction g est surjective car, pour tout $y \in \mathbb{N}$, $g(2y) = y$.

Elle n'est pas injective car $g(0) = g(1) = 0$. Ainsi, g n'est pas bijective.

N.B. : Remarquons que $g \circ f$ est bijective, et que $f \circ g$ n'est ni injective, ni surjective.

29 Bijection et fonction réciproque

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$ est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1} .

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 2e^x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x} + 2e^x > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, par limites usuelles $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Par le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On pose $X = e^x > 0$. Alors,

$$f(x) = y \iff X^2 + 2X = y \iff X^2 + 2X - y = 0.$$

En posant le discriminant valant $4 + 4y > 0$, on obtient deux racines, dont une seule strictement positive. Ainsi, $X = \sqrt{y+1} - 1$, donc $x = \ln(\sqrt{y+1} - 1)$.

Par voie de conséquence, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(y) = \ln(\sqrt{y+1} - 1)$.

30 Plus théorique sur les injections/surjections

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Démontrer que, si f est strictement monotone, alors f est injective, sans utiliser le théorème de la bijection réciproque.
2. Soient I, J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Soient I, J, K trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow K$. Démontrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
4. Chercher un exemple pour le point 2 où $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.
5. Chercher un exemple pour le point 3 où $g \circ f$ est surjective, mais f ne l'est pas.

Corrigé

1. Supposons par exemple que f est strictement croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $f(x) = f(y)$.
Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$, ce qui est impossible. De même, si $y < x$, alors $f(y) < f(x)$, ce qui est impossible. Donc, $x = y$.
Le cas où f est strictement décroissante est similaire. Ainsi, f est injective.
2. Soient $x, y \in I$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$.
Comme $g \circ f$ est injective, on obtient $x = y$. Ainsi, f est injective.
3. Soit $z \in K$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in I$ tel que $g(f(x)) = z$.
Or, $f(x) \in J$. Ainsi, z admet un antécédent par g , qui est $f(x)$. Donc, g est surjective.
4. On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
Alors $(g \circ f)(x) = e^{2x}$, donc $g \circ f$ est injective. En revanche, g n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$.
5. On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = \ln(e^x) = x$. Ainsi, $g \circ f$ est surjective.
En revanche, f n'est pas surjective car aucun réel strictement négatif n'admet d'antécédent.

31 Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f .
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α .
(b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α . En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
(c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1, +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g .
5. Montrer que g est dérivable sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$. Pour $x \neq 0$, exprimer $g'(x)$ en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle, puis calculer $g'(0)$.
6. Montrer que l'équation $2^{-x} = x$ admet une unique solution réelle et que celle-ci vaut $x = \frac{g(\ln(2))}{\ln(2)}$ (on ne cherchera pas à l'explicitier davantage).
7. Exprimer de même l'unique solution de l'équation $x^x = 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g . Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $i(a) = m_a$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du minimum de h_a est une fonction croissante du paramètre a , et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Corrigé

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$.
Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée, $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$. Ainsi,

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x+2)e^x$. Comme $e^x > 0$, on a $f''(x) = 0 \iff x = -2$. Ainsi, $\alpha = -2$.

(b) On a $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$.

Donc, une équation de (T) est $y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = -\frac{x+4}{e^2}$.

La droite (T) coupe l'axe des abscisses au point $(-4, 0)$.

(c) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - \left(-\frac{x+4}{e^2}\right)$.

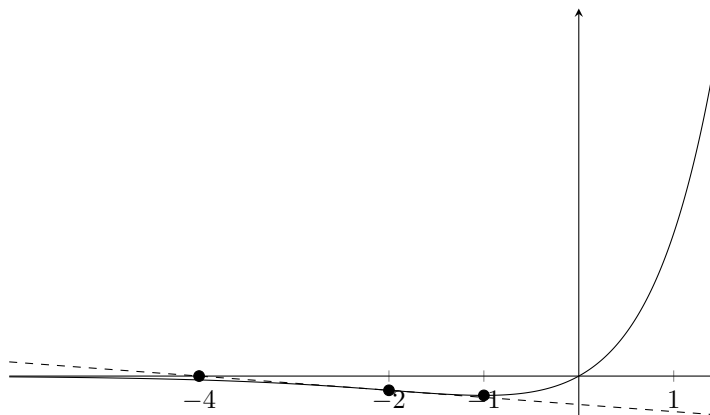
On a $\varphi'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{e^2}$ et $\varphi''(x) = (x+2)e^x$.

Ainsi, φ' est décroissante sur $] -\infty, -2]$, puis croissante sur $[-2, +\infty[$. Or, $\varphi'(-2) = 0$, donc $\varphi'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Je vous encourage à faire les tableaux de variations si besoin pour vous représenter cela).

La fonction φ est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(-2) = 0$, on a $\varphi(x) \leq 0$ si $x \leq -2$ et $\varphi(x) \geq 0$ si $x \geq -2$.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (T) sur $] -\infty, -2]$ et au-dessus de (T) sur $[-2, +\infty[$.

3. On obtient le tracé suivant :



4. D'après la question 1, f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. De plus, $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Par le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $[-1, +\infty[$ vers $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Sa fonction réciproque g est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$. De plus, $g\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$, $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Ainsi,

x	$-\frac{1}{e}$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	$+\infty$
	-1		

5. La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$, $f'(x) = (x+1)e^x > 0$.

Par le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, g est dérivable sur $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(1+g(x))e^{g(x)}}$.

Or, pour $x \neq 0$, $g(x)e^{g(x)} = x$, donc $e^{g(x)} = \frac{x}{g(x)}$. Ainsi, $g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}$.

Enfin, $g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$.

6. Toute solution de $2^{-x} = x$ est strictement positive. On a $2^{-x} = x \iff xe^{x \ln(2)} = 1$.

On pose $u = x \ln(2) > 0$. Alors, $xe^{x \ln(2)} = 1 \iff \frac{u}{\ln(2)} e^u = 1 \iff ue^u = \ln(2)$.

Par définition de g , $u = g(\ln(2))$. Ainsi, $x = \frac{g(\ln(2))}{\ln(2)}$.

L'unicité découle de la bijectivité de g sur $[0, +\infty[$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x^x = 3 \iff x \ln(x) = \ln(3)$.

On pose $u = \ln(x)$, donc $x = e^u$. Alors, $x \ln(x) = \ln(3) \iff ue^u = \ln(3)$. Ainsi, $u = g(\ln(3))$, puis $x = e^{g(\ln(3))}$. L'unicité découle de nouveau de la bijectivité de g .

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'_a(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(2axe^x - 1)$.

Comme $e^{-x} > 0$, $h'_a(x) = 0 \iff xe^x = \frac{1}{2a} \iff x = g\left(\frac{1}{2a}\right)$. On pose donc $m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right)$.

Comme $\frac{1}{2a} > 0$, on a $m_a > 0$. De plus, $h'_a(x) < 0$ pour $x < m_a$ et $h'_a(x) > 0$ pour $x > m_a$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = +\infty$ (usuelle). Ainsi,

x	$-\infty$	m_a	$+\infty$
$h'_a(x)$		0	
$h_a(x)$	$+\infty$	$h_a(m_a)$	$+\infty$

La fonction h_a admet donc un minimum en m_a . Comme $h'_a(m_a) = 0$, on a $e^{-m_a} = 2am_a$.

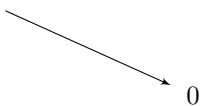
Ainsi, $h_a(m_a) = e^{-m_a} + am_a^2 = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a + 2)$.

2. On a, pour tout $a > 0$, $i(a) = g\left(\frac{1}{2a}\right)$.

La fonction $a \mapsto \frac{1}{2a}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et g est strictement croissante. Ainsi, i est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{2a} = +\infty$ et $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2a} = 0$. Donc, $\lim_{a \rightarrow 0^+} i(a) = +\infty$ et $\lim_{a \rightarrow +\infty} i(a) = g(0) = 0$.

a	0	$+\infty$
$i(a)$	$+\infty$	0



3. On note $M(a) = h_a(m_a)$ la valeur du minimum de h_a .

Soient $0 < a < b$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_b(x) = h_a(x) + (b-a)x^2$.

En particulier, comme $m_b > 0$, $M(b) = h_b(m_b) = h_a(m_b) + (b-a)m_b^2 > h_a(m_b) \geq M(a)$.

Ainsi, la valeur du minimum de h_a est une fonction strictement croissante de a .

De plus, la relation $e^{-m_a} = 2am_a$ donne $am_a = \frac{1}{2}e^{-m_a}$. Ainsi, $M(a) = am_a(m_a + 2) = \frac{1}{2}e^{-m_a}(m_a + 2)$.

D'après la question précédente, $\lim_{a \rightarrow +\infty} m_a = 0$. Donc, $\lim_{a \rightarrow +\infty} M(a) = 1$.