

Corrigé du DS de rentrée

1 Petites questions

Corrigé

1. On développe successivement les parenthèses :

$$A = [(b-a) - (a-2)] - [a-5 - (b-1)] = b-a-a+2-a+5+b-1 = 2b-3a+6.$$

2. On calcule séparément le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } B = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6} \times (-4) = \frac{2}{3}.$$

3. On développe :

$$\begin{aligned} C &= 3b^2(2a-2) - [2a^2(2b-3) - 2a(3b^2+2)] = 6ab^2 - 6b^2 - [4a^2b - 6a^2 - 6ab^2 - 4a] \\ &= 6ab^2 - 6b^2 - 4a^2b + 6a^2 + 6ab^2 + 4a = 12ab^2 - 6b^2 - 4a^2b + 6a^2 + 4a. \end{aligned}$$

4. On a $D = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

5. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$E = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{5-3} = \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{2} = 4 + \sqrt{15}.$$

6. On a

$$F = \left(-\frac{2}{3}\right) b^2 \times \frac{9}{4} a^2 x^2 \times (-x)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{9}{4} \times (-1) \times a^2 b^2 x^5 = \frac{3}{2} a^2 b^2 x^5.$$

$$\text{Par ailleurs, } G = \frac{9^{1023}}{3^{2026}} = \frac{(3^2)^{1023}}{3^{2026}} = \frac{3^{2046}}{3^{2026}} = 3^{20}.$$

7. On développe :

$$H = (x^5 + 7 - 2x^3)(3x^3 - 2x) = 3x^8 - 2x^6 + 21x^3 - 14x - 6x^6 + 4x^4 = 3x^8 - 8x^6 + 4x^4 + 21x^3 - 14x.$$

De même,

$$I = (2x^3 - 3x)(4x - 5x^2) = 8x^4 - 10x^5 - 12x^2 + 15x^3 = -10x^5 + 8x^4 + 15x^3 - 12x^2.$$

8. La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto (2x+1)\exp(x^2+x+1)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 1 > 0$, donc $\sqrt{x^2+1} > 0$ et g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$. Par conséquent, $g' : x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$.

2 Problème

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}.$$

Corrigé

1. On a $u_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$, puis $u_2 = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}$ et $u_3 = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n > 0$.

— **Initialisation.** On a $u_0 = 1 > 0$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} > 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} - 1 = \frac{1}{u_n + 1}$.

D'après la question précédente, $u_n > 0$, donc $u_n + 1 > 0$ et ainsi $u_{n+1} - 1 > 0$. On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $u_n > 1$.

4. Pour $\ell \neq -1$,

$$\ell = \frac{\ell + 2}{\ell + 1} \iff \ell(\ell + 1) = \ell + 2 \iff \ell^2 = 2 \iff \ell \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

Les deux solutions obtenues sont différentes de -1 . Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

5. Supposons que (u_n) converge vers ℓ . La suite (u_{n+1}) converge alors également vers ℓ .

D'après la question 3, pour tout $n \geq 1$, $u_n > 1$. Par passage à la limite, on a donc $\ell \geq 1$, et en particulier $\ell \neq -1$.

On peut donc passer à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$, ce qui donne $\ell = \frac{\ell + 2}{\ell + 1}$.

D'après la question précédente, $\ell \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Comme $\ell \geq 1$, on obtient finalement $\ell = \sqrt{2}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2} \\ &= \frac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2})u_n + 2 - \sqrt{2}}{u_n + 1} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}. \end{aligned}$$

7. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + \sqrt{2} &= \frac{u_n + 2}{u_n + 1} + \sqrt{2} \\ &= \frac{u_n + 2 + \sqrt{2}u_n + \sqrt{2}}{u_n + 1} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})u_n + 2 + \sqrt{2}}{u_n + 1} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})}{u_n + 1}. \end{aligned}$$

8. D'après la question 2, $u_n + 1 > 0$. De plus, $1 - \sqrt{2} < 0$. La relation obtenue à la question 6 montre donc que $u_{n+1} - \sqrt{2}$ et $u_n - \sqrt{2}$ sont de signes opposés dès lors que $u_n \neq \sqrt{2}$. La question suivante permet de démontrer que $u_n \neq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_{2n} < \sqrt{2} < u_{2n+1}$.

— **Initialisation.** On a $u_0 = 1 < \sqrt{2}$ et $u_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$ car $\frac{9}{4} > 2$. Ainsi $u_0 < \sqrt{2} < u_1$, donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n} < \sqrt{2} < u_{2n+1}$. D'après la question précédente, $u_{2n+1} - \sqrt{2}$ et $u_{2n+2} - \sqrt{2}$ sont de signes contraires. Comme $u_{2n+1} > \sqrt{2}$, on a $u_{2n+2} < \sqrt{2}$. De même, $u_{2n+2} - \sqrt{2}$ et $u_{2n+3} - \sqrt{2}$ sont de signes contraires. Comme $u_{2n+2} < \sqrt{2}$, on a $u_{2n+3} > \sqrt{2}$. Ainsi, $u_{2n+2} < \sqrt{2} < u_{2n+3}$.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < \sqrt{2} < u_{2n+1}$.

10. D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Ainsi $u_n + \sqrt{2} > 0$, donc $u_n + \sqrt{2} \neq 0$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$ est bien défini.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les questions 6 et 7,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\frac{(1-\sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}}{\frac{(1+\sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})}{u_n + 1}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} v_n. \end{aligned}$$

12. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$.

De plus, $v_0 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = q$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{n+1}$.

Or $|q| = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} < 1$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}} \iff v_n(u_n + \sqrt{2}) = u_n - \sqrt{2} \iff u_n(1 - v_n) = \sqrt{2}(1 + v_n).$$

De plus, comme $u_n > 0$ et $\sqrt{2} > 0$, on a $|u_n - \sqrt{2}| < u_n + \sqrt{2}$, donc $|v_n| < 1$. En particulier, $v_n \neq 1$ et $u_n = \sqrt{2} \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2} \frac{1 + 0}{1 - 0} = \sqrt{2}$.