

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

Attention : le sujet n'est pas conçu pour être terminé intégralement. L'objectif est notamment d'évaluer votre capacité à aborder des questions de difficultés variées.

Commencez par lire l'ensemble du sujet et traitez en priorité les questions sur lesquelles vous vous sentez le plus à l'aise. Si vous restez bloqué plus de cinq minutes sur une question, il est conseillé de passer à la suivante.

Vous pouvez admettre un résultat que vous n'avez pas réussi à démontrer et l'utiliser dans la suite du sujet.

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

1 Petites questions

1. Simplifier l'expression suivante et l'écrire sans parenthèse : $A = [(b - a) - (a - 2)] - [a - 5 - (b - 1)]$
2. Simplifier la fraction suivante : $B = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - 1}$.
3. Développer et réduire, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le réel $C = 3b^2(2a - 2) - [2a^2(2b - 3) - 2a(3b^2 + 2)]$.
4. Ecrire aussi simplement que possible $D = \sqrt{(-5)^2}$.
5. Ecrire la fraction suivante sans racine carrée au dénominateur : $E = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Indice : on pourra multiplier par $1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

6. Simplifier, pour $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$, $F = \left(-\frac{2}{3}\right)b^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)a^2x^2 \cdot (-x)^3$ et $G = \frac{9^{1023}}{3^{2026}}$.
7. Développer et simplifier $H = (x^5 + 7 - 2x^3)(3x^3 - 2x)$ et $I = (2x^3 - 3x)(4x - 5x^2)$
8. Dériver $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(x^2 + x + 1)$ et $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow \ln(\sqrt{x^2 + 1})$

2 Problème

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{u_n + 1}$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n > 1$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ell = \frac{\ell + 2}{\ell + 1}$.
5. On suppose que (u_n) converge vers ℓ . Au vu des questions précédentes, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}$.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})}{u_n + 1}$.
8. En déduire que $u_n - \sqrt{2}$ et $u_{n+1} - \sqrt{2}$ sont de signes contraires.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < \sqrt{2} < u_{2n+1}$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.
Justifier que la suite (v_n) est bien définie.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} v_n$.
12. En déduire que (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
13. Exprimer u_n en fonction de v_n .
En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.