

Interrogation de cours – 1

NOM :

Prénom :

1. Écrire la négation de la proposition suivante.

(a) “ $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \Rightarrow e^x > 0)$ ”.

Corrigé

$\exists x \in \mathbb{R}, x > 1 \text{ et } e^x \leq 0$.

2. Soit $I, J \subset \mathbb{R}$. On note f une fonction de I dans J . Écrire les propositions suivantes à l’aide de quantificateurs.

(a) “La fonction f est injective”.

(b) “La fonction f est paire”.

Corrigé

(a) La fonction f est injective si $\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

(b) La fonction f est paire si I est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.

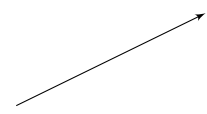
3. Démontrer l’inégalité suivante : $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$

Corrigé

On pose $g : x \mapsto x - \sin(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - \cos(x)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leq 1$. Ainsi, $g'(x) \geq 0$. On obtient le tableau de variation suivant, puisque $g(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	0	

On voit donc que g est supérieure à 0. Ainsi, pour $x \geq 0, g(x) \geq 0$, soit $x - \sin(x) \geq 0$, d’où $\sin(x) \leq x$.

4. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et calculer sa réciproque.

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0$ (par positivité de l'exponentielle). Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, par limite usuelle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$.

La fonction f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \mathbb{R}$.

Calculons maintenant sa réciproque.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche l'unique réel x tel que $f(x) = y$.

On a

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \stackrel{\times 2e^x}{\iff} e^{2x} - 1 = 2ye^x \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Posons $X = e^x$. On a nécessairement $X > 0$ et $X^2 - 2yX - 1 = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = (-2y)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4(y^2 + 1)$. Les deux solutions sont donc

$$X = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{ou} \quad X = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Puisqu'uniquement la seconde est positive, on obtient que $X = y + \sqrt{y^2 + 1}$. Comme $X = e^x > 0$, on obtient nécessairement $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, soit $x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$.

Par conséquent, $f^{-1} : y \mapsto \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$.