

Classiques

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (2k - 3)$
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \binom{i}{j}$
3. Dériver la fonction $x \rightarrow x^{\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Simplifier les expressions suivantes, pour $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$:

$$E = \left(-\frac{3}{5}\right) a^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) b^2 x \cdot (-x)^4 \quad F = \frac{4^{1023}}{2^{2025}}.$$

5. Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sqrt{2}/2$ dans $[0, 2\pi]$.
6. Donner la définition de la fonction valeur absolue, et rappeler les deux inégalités triangulaires du cours.
7. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Traduire “ f est croissante” par une proposition avec des quantificateurs.
 - (b) Écrire la négation de la proposition $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
 - (c) Écrire la négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
8. Écrire la contraposée de l'implication “ n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair”.
9. Soient $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $f : x \mapsto e^x$. Expliciter les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ et préciser pour chacune d'elles le domaine de définition.

Corrigé des classiques

1. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (2k - 3) = 2 \sum_{k=0}^n k - 3 \sum_{k=0}^n 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3(n+1) = n(n+1) - 3(n+1).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n (2k - 3) = (n-2)(n+1).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} - \binom{i}{0} \right) = \sum_{i=1}^n (2^i - 1).$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} = \left(\sum_{i=1}^n 2^i \right) - n = (2^{n+1} - 2) - n.$$

3. Soit $f(x) = x^{\cos x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a $f(x) = \exp(\cos(x) \ln(x))$. Alors, en définissant $u(x) = \cos(x) \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$u'(x) = -\sin(x) \ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}.$$

Donc

$$f'(x) = x^{\cos x} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x) \ln(x) \right).$$

- 4.

$$\begin{aligned} E &= \left(-\frac{3}{5}\right) a^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) b^2 x \cdot (-x)^4 \\ &= \left(-\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{3}\right) a^2 b^2 x \cdot x^4 \quad \text{car } (-x)^4 = x^4 \\ &= -\frac{2}{5} a^2 b^2 x^5. \end{aligned}$$

$$F = \frac{4^{1023}}{2^{2025}} = \frac{(2^2)^{1023}}{2^{2025}} = \frac{2^{2046}}{2^{2025}} = 2^{21}.$$

5. Résolvons $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0, 2\pi]$. On sait que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$ modulo 2π . Ainsi

$$2x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{7\pi}{4} + 2\pi.$$

Donc

$$x = \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$

6.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les inégalités triangulaires :

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

7. (a) “ f est croissante” :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

(b) Négation de $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0.$$

(c) Négation de $\forall x, y \in \mathbb{R}, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y.$$

8. Contraposée de “ n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair” :

$$n \text{ est impair} \Rightarrow n^2 \text{ est impair.}$$

9.

$$g \circ f(x) = g(e^x) = \sqrt{e^x - 1}, \quad \text{domaine : } \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1\} = [0, +\infty[.$$

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x-1}) = e^{\sqrt{x-1}}, \quad \text{domaine : } [1, +\infty[.$$

1 Deux méthodes

L’objectif de cette partie est de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=1}^n kx^k.$$

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

1. Expliciter $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. (a) Calculer de deux manières différentes $f'_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Dédire que

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n}{1-x} + \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

En déduire $\sum_{k=1}^n kx^k$.

3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \leq 2 \quad \text{puis que :} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Corrigé

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a une somme géométrique :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. (a) D'une part, on peut dériver terme à terme :

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}.$$

D'autre part, on dérive l'expression explicite de f_n :

$$f_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

On dérive uv avec u le numérateur et $v : x \rightarrow 1/(1-x)$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{(1 - (n+1)x^n)}{(1-x)} - \frac{(-x + (n+1)x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(1 - (n+1)x^n)}{(1-x)} + \frac{(x - (n+1)x^n(-1))}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

- (b) On a donc

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n}{1-x} + \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x (valide pour $x \neq 1$) :

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

3. On prend $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - (n+1)\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+2}}}{(1 - \frac{1}{2})^2}.$$

Or $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{4}}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 1 - \frac{n+1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \leq 2$ pour tout n , et comme $\frac{n+2}{2^n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \rightarrow 2.$$

Partie II : Transformée d'Abel

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On définit deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

Remarque La transformée d'Abel permet de nombreux calculs... Mais n'est pas au programme d'ECG ! Elle peut en revanche tomber comme exercice aux concours, comme ce qui est écrit ci-dessus.

Corrigé

Corrigé : Partie II – Transformée d'Abel

1. On part de

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k.$$

On écrit $a_k = A_k - A_{k-1}$ avec la convention $A_{-1} = 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k.$$

On sépare les sommes :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k.$$

On décale l'indice dans la deuxième somme ($j = k - 1$) :

$$\sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k = \sum_{j=-1}^{n-1} A_j B_{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j B_{j+1},$$

car $A_{-1} = 0$.

Donc

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1}.$$

On regroupe :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}).$$

Or $B_k - B_{k+1} = -b_k$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

2. On veut calculer $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

On applique la formule avec $a_k = 2^k$, $B_k = k$. Alors

$$A_n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1, \quad b_k = B_{k+1} - B_k = (k+1) - k = 1.$$

D'après la formule démontrée :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1).$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = (2^{n+1} - 2) - n.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = (2^{n+1} - 1)n - (2^{n+1} - 2 - n) = n2^{n+1} - n - 2^{n+1} + 2 + n.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

2 Ecricome 2025

1. (a) Montrer que, pour tout couple (α, β) de réels,

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

- (b) Montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. Soit φ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par :

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- (a) Justifier que φ continue et dérivable, de dérivée continue, sur $]0, \pi]$, et déterminer $\varphi'(t)$.
(b) *Plus difficile - on aura plus d'outils plus tard* Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ et en déduire que φ se prolonge par continuité en 0.

On admettra que la fonction ainsi prolongée est toujours continue et dérivable, de dérivée continue, sur $[0, \pi]$. On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.

.

- (c) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Démontrer que $\forall t \in [0, \pi[, f(t) = \varphi(\pi - t)$. En déduire que f se prolonge de manière continue, dérivable, de dérivée continue sur $[0, \pi]$.

Correction

1. (a) On rappelle les formules :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

En les additionnant :

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

D'où le résultat souhaité.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos(t/2)}.$$

Initialisation : $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k \cos(kt) = -\cos(t).$$

Formule proposée :

$$-\frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{\cos(3t/2)}{2 \cos(t/2)}.$$

Or, par la question (a) avec $(\alpha, \beta) = (t, t/2)$:

$$2 \cos(t) \cos(t/2) = \cos(3t/2) + \cos(t/2).$$

Donc

$$\frac{\cos(3t/2)}{2 \cos(t/2)} = \cos(t) - \frac{1}{2}.$$

La formule devient :

$$-\frac{1}{2} - \cos(t) + \frac{1}{2} = -\cos(t),$$

ce qui coïncide avec le calcul direct. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie. Alors, par $P(n)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) &= (-1)^{n+1} \cos((n+1)t) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos(t/2)} \right) + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t). \end{aligned}$$

On met en facteur $(-1)^{n+1}$ sur la partie de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \left(-\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos(t/2)} + \cos((n+1)t) \right) \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \left(-\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + 2 \cos(t/2) \cos((n+1)t)}{2 \cos(t/2)} \right). \end{aligned}$$

Or, d'après (a) appliqué avec $\alpha = (n+1)t$, $\beta = t/2$:

$$2 \cos((n+1)t) \cos(t/2) = \cos\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right).$$

Donc

$$-\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + 2 \cos(t/2) \cos((n+1)t) = \cos\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right).$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right)}{2 \cos(t/2)},$$

ce qui est exactement la formule au rang $n+1$.

Ainsi, par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Sur $]0, \pi]$, la fonction $t \mapsto t$ est $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto \sin(t/2)$ est $\mathcal{C}^1$, et son dénominateur ne s'annule pas (car $\sin(t/2) > 0$ sur $]0, \pi]$).

Donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$.

En dérivant (quotient) :

$$\varphi'(t) = \frac{\sin(t/2) \cdot 1 - t \cdot \frac{1}{2} \cos(t/2)}{\sin^2(t/2)} = \frac{\sin(t/2) - \frac{t}{2} \cos(t/2)}{\sin^2(t/2)}.$$

- (b) Quand $t \rightarrow 0$, posons $u = t/2 \rightarrow 0$. Alors

$$\varphi(t) = \frac{t}{\sin(t/2)} = \frac{2u}{\sin(u)}.$$

Or $\frac{\sin(u)}{u} \rightarrow 1$, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u}{\sin(u)} = 2.$$

On peut donc prolonger φ par continuité en posant $\varphi(0) = 2$.

(c) Pour $t \in [0, \pi[$, on a

$$\varphi(\pi - t) = \frac{\pi - t}{\sin\left(\frac{\pi - t}{2}\right)}.$$

Or

$$\sin\left(\frac{\pi - t}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \cos(t/2).$$

Donc

$$\varphi(\pi - t) = \frac{\pi - t}{\cos(t/2)} = f(t).$$

Ainsi $f(t) = \varphi(\pi - t)$ pour tout $t \in [0, \pi[$. Comme φ se prolonge de manière $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, il en résulte que f aussi se prolonge de manière continue, dérivable, et de dérivée continue sur $[0, \pi]$.

Exercice 3 - EM Lyon 2019

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

- Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.
- Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$.

On note $g : [2; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1; +\infty[$.

- Dresser le tableau de variations de g .
 - Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2; +\infty[$.
 - Soit $y \in [2; +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0; +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

Corrigé

- Étude des variations de f .**

On a $f(t) = t + \frac{1}{t}$ définie sur $]0; +\infty[$.

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}.$$

Donc, le tableau de variation est

t	0	1	$+\infty$
t^2	0	+	+
$t^2 - 1$	-1	-	0
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	$+\infty$	2	$+\infty$

- Bijection de f sur $[1; +\infty[$.**

Sur $[1; +\infty[$, f est **continue** et **strictement croissante**. De plus : $f(1) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.
Donc f est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$. On note g sa bijection réciproque.

- Étude de la fonction réciproque g .**

(a) Comme f est croissante, g est aussi **croissante**.

(b) f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f'(t) \neq 0$. Donc g est **dérivable** sur $]2; +\infty[$, et on a :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

(c) On résout $f(t) = y$, i.e. $t + \frac{1}{t} = y$. Cela revient à l'équation quadratique :

$$t^2 - yt + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ (car $y \geq 2$). Les solutions sont :

$$t = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Comme $t \in [1; +\infty[$, on retient la solution la plus grande :

$$g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

4 Sommes et produits télescopiques

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

(a) Démontrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

(b) En déduire S_n .

2. A l'aide d'un changement de variables, calculer

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

3. Simplifier

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

4. Simplifier

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k}$$

Corrigé

1. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

(a) On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}, \quad \forall k \geq 1.$$

On écrit au même dénominateur :

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)}.$$

Donc on doit avoir :

$$a(k+1) + bk = 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Ce polynôme en k doit être identiquement constant. On obtient :

$$a + b = 0, \quad a = 1.$$

Ainsi $a = 1$, $b = -1$. On a donc

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(b) On en déduit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

C'est une somme télescopique. D'après le cours, on a donc :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

2. On considère

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k}.$$

Posons $j = n+1-k$. Quand k varie de 1 à n , j varie aussi de n à 1. Donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 0.$$

3. On simplifie

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

On factorise :

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

Donc :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

On sépare :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}.$$

- Le premier produit est télescopique :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}.$$

- Le second produit aussi :

$$\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Donc :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

4. Enfin,

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}.$$

Mais

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Donc :

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k} = \frac{n+1}{2^n}.$$

Problème 1

Partie I

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également : $A = \Delta + N$.

1. (a) Calculer N^2 , puis en déduire N^k pour tout entier $k \geq 2$.
 (b) Calculer PQ . En déduire (ou calculer) QP .
2. (a) Vérifier que $Q\Delta P = D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Montrer que $\Delta = PDQ$.
- (c) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n = PD^nQ$.
- (d) En déduire les neuf coefficients de la matrice Δ^n .
3. (a) Vérifier que : $\Delta N = N\Delta$.
- (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N$.
- (c) En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n .

Partie II

Dans cette partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice définie dans la partie I.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
3. En utilisant la question 3.(c) de la partie précédente, déterminer l'expression de x_n, y_n, z_n en fonction de n .

Partie III

Dans cette partie, on propose une autre méthode afin d'étudier les suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ de la partie II.

1. En utilisant la définition de la suite (z_n) , déterminer directement la valeur de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n uniquement.
3. Introduisons alors les suites (r_n) définies par $r_n = x_n + y_n$, pour tout entier naturel n .
 - (a) Déduire de l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} une relation vérifiée par r_n .
 - (b) Montrer que la suite (r_n) est arithmétique et en donner la raison.
 - (c) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n .
4. Analysons maintenant la suite (s_n) définie par $s_n = 2x_n + y_n$, pour tout entier naturel n .
 - (a) Prouver que la suite (s_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - (b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n .
5. En vous appuyant sur les résultats des 3. et 4., retrouver les résultats de la question 3 de la partie II.

Corrigé Partie I

1. (a) On calcule :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $N^2 = 0$. Par conséquent, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$N^k = 0.$$

(b) On calcule :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Donc, $P = Q^{-1}$. Donc, on en déduit :

$$QP = I_3.$$

(On pouvait également le vérifier directement par calcul matriciel.)

2. (a) On vérifie directement :

$$Q\Delta P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

(b) Comme $QP = I_3$, on obtient :

$$Q\Delta P = D \iff PQ\Delta PQ = PDQ \iff I_3\Delta I_3 = PDQ \iff \Delta = PDQ$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose la propriété

$$P(n) : \quad \Delta^n = PD^nQ.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $\Delta^0 = I_3$. Or $D^0 = I_3$ et donc $PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$ puisque $PQ = I_3$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\Delta^n = PD^nQ.$$

Alors :

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n \Delta = (PD^nQ)(PDQ).$$

Comme $QP = I_3$, il vient :

$$\Delta^{n+1} = PD^n(QP)DQ = PD^nI_3DQ = PD^{n+1}Q.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ.$$

(d) On calcule $D^n = \text{diag}(2^n, 1, 1)$. Puis :

$$\Delta^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le calcul, on trouve :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 & 0 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) On calcule :

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3+2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N.$$

De même,

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1*1 \\ 0 & 0 & 2*1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N.$$

$$\Delta N = N\Delta = N.$$

- (b) On procède par récurrence. - Pour $n = 0$, $A^0 = I = \Delta^0 + 0 \cdot \Delta^{-1}N$.
 - Supposons la formule vraie au rang n :

$$A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N.$$

Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (\Delta^n + n\Delta^{n-1}N)(\Delta + N).$$

Comme Δ et N commutent et $N^2 = 0$, on obtient :

$$A^{n+1} = \Delta^{n+1} + (n+1)\Delta^n N.$$

La formule est donc prouvée.

- (c) On en déduit :

$$A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N.$$

Au vu de la question 3.a), on observe que, par récurrence rapide, $\Delta^n N = N$. Ainsi,

$$A^n = A^n = \Delta^n + nN = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 & -n \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction Partie II

1. On a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n - z_n \\ -2x_n + 2z_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $U_{n+1} = AU_n$.

2. On veut montrer que $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation** : pour $n = 0$, $U_0 = A^0 U_0$, vrai.
Hérédité : supposons $U_n = A^n U_0$. Alors

$$U_{n+1} = AU_n = A(A^n U_0) = A^{n+1} U_0.$$

Donc $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Par récurrence, la formule est démontrée.

3. D'après la partie I, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 & -n \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (2^n - 1) - n \\ (-2^{n+1} + 2) + (-2^n + 2) + 2n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, après simplification :

$$x_n = 3 \cdot 2^n - 2 - n, \quad y_n = -3 \cdot 2^n + 4 + 2n, \quad z_n = 1.$$

Correction Partie III

1. Par définition, pour $n \geq 0$, on a $z_{n+1} = z_n$. Comme $z_0 = 1$, on en déduit immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé de la Partie II :

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n, \quad y_{n+1} = -2x_n + 2z_n.$$

Avec $z_n = 1$, cela devient :

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1, \quad y_{n+1} = -2x_n + 2.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit $r_n = x_n + y_n$.

(a) On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = (3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = x_n + y_n + 1 = r_n + 1.$$

(b) Ainsi $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1. Comme $r_0 = x_0 + y_0 = 1 + 1 = 2$, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = 2 + n.$$

(c) Donc, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = x_n + y_n = n + 2.$$

4. Introduisons pour $n \in \mathbb{N}$ $s_n = 2x_n + y_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2(3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = 4x_n + 2y_n = 2s_n.$$

Ainsi, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.

(b) Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 2^n s_0 = 3 \cdot 2^n$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$x_n = s_n - r_n = 3 \cdot 2^n - n - 2$$

et

$$y_n = r_n - x_n = -3 \cdot 2^n + 2n + 4.$$

On retrouve donc exactement les expressions de x_n, y_n, z_n demandées.