

Classiques

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (2k-3)$
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \binom{i}{j}$
3. Dériver la fonction $x \rightarrow x^{\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Simplifier les expressions suivantes, pour $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$:

$$E = \left(-\frac{3}{5}\right) a^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) b^2 x \cdot (-x)^4 \quad F = \frac{4^{1023}}{2^{2025}}.$$

5. Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sqrt{2}/2$ dans $[0, 2\pi]$.
6. Donner la définition de la fonction valeur absolue, et rappeler les deux inégalités triangulaires du cours.
7. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Traduire “ f est croissante” par une proposition avec des quantificateurs.
 - (b) Écrire la négation de la proposition $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
 - (c) Écrire la négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
8. Écrire la contraposée de l'implication “ n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair”.
9. Soient $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $f : x \mapsto e^x$. Expliciter les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ et préciser pour chacune d'elles le domaine de définition.

1 Deux méthodes

L'objectif de cette partie est de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=1}^n kx^k.$$

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

1. Expliciter $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. (a) Calculer de deux manières différentes $f'_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(b) Dédire que

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n}{1-x} + \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

En déduire $\sum_{k=1}^n kx^k$.

3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \leq 2 \quad \text{puis que :} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Partie II : Transformée d'Abel

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On définit deux suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n 2^k k$.

Remarque La transformée d'Abel permet de nombreux calculs... Mais n'est pas au programme d'ECG ! Elle peut en revanche tomber comme exercice aux concours, comme ce qui est écrit ci-dessus.

2 Ecricome 2025

1. (a) Montrer que, pour tout couple (α, β) de réels,

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

- (b) Montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. Soit φ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par :

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- (a) Justifier que φ continue et dérivable, de dérivée continue, sur $]0, \pi]$, et déterminer $\varphi'(t)$.
- (b) *Plus difficile - on aura plus d'outils plus tard* Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ et en déduire que φ se prolonge par continuité en 0.

On admettra que la fonction ainsi prolongée est toujours continue et dérivable, de dérivée continue, sur $[0, \pi]$. On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.

- (c) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par :

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Démontrer que $\forall t \in [0, \pi]$, $f(t) = \varphi(\pi - t)$. En déduire que f se prolonge de manière continue, dérivable, de dérivée continue sur $[0, \pi]$.

Exercice 3 - EM Lyon 2019

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$.

On note $g : [2; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1; +\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g .
- (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2; +\infty[$.
- (c) Soit $y \in [2; +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0; +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

4 Sommes et produits télescopiques

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

(a) Démontrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

(b) En déduire S_n .

2. A l'aide d'un changement de variables, calculer

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

3. Simplifier

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

4. Simplifier

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k}$$

Problème 1

Partie I

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également : $A = \Delta + N$.

- (a) Calculer N^2 , puis en déduire N^k pour tout entier $k \geq 2$.
(b) Calculer PQ . En déduire (ou calculer) QP .
- (a) Vérifier que $Q\Delta P = D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Montrer que $\Delta = PDQ$.
(c) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ$.
(d) En déduire les neuf coefficients de la matrice Δ^n .
- (a) Vérifier que : $\Delta N = N\Delta$.
(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N$.
(c) En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n .

Partie II

Dans cette partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice définie dans la partie I.
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
- En utilisant la question 3.(c) de la partie précédente, déterminer l'expression de x_n, y_n, z_n en fonction de n .

Partie III

Dans cette partie, on propose une autre méthode afin d'étudier les suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ de la partie II.

1. En utilisant la définition de la suite (z_n) , déterminer directement la valeur de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n uniquement.
3. Introduisons alors les suites (r_n) définies par $r_n = x_n + y_n$, pour tout entier naturel n .
 - (a) Dédurre de l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} une relation vérifiée par r_n .
 - (b) Montrer que la suite (r_n) est arithmétique et en donner la raison.
 - (c) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n .
4. Analysons maintenant la suite (s_n) définie par $s_n = 2x_n + y_n$, pour tout entier naturel n .
 - (a) Prouver que la suite (s_n) est géométrique et préciser sa raison.
 - (b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n .
5. En vous appuyant sur les résultats des 3. et 4., retrouver les résultats de la question 3 de la partie II.