

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres."
SAMUEL JOHNSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Rappel 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x - 1 \leq \sqrt{|x + 1|}.$$

Rappel 2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\lfloor e^x \rfloor = n$$

d'inconnue x .

Corrigé

1. Résolution de l'inéquation

$$x - 1 \leq \sqrt{|x + 1|}.$$

Domaine de définition : $x \rightarrow \sqrt{|x + 1|}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $|x + 1| \geq 0$. L'inéquation est donc définie sur $\mathbb{R}$.

On distingue deux cas selon le signe de $x + 1$.

Cas 1 : $x \geq -1$. Alors $|x + 1| = x + 1$ et l'inéquation devient

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 1}.$$

On a $\sqrt{x + 1} \geq 0$, donc si $x < 1$, le membre gauche $x - 1 < 0$ et l'inégalité est vérifiée. Ainsi, tout $x \in [-1, 1[$ convient.

Pour $x \geq 1$, on peut élever au carré (les deux membres sont positifs) :

$$(x - 1)^2 \leq x + 1 \iff x^2 - 2x + 1 \leq x + 1 \iff x^2 - 3x \leq 0 \iff x(x - 3) \leq 0.$$

Donc $x \in [0, 3]$. Ainsi, lorsque $x \geq -1$, on obtient que x est solution si et seulement si $x \in [-1, 3]$.

Cas 2 : $x < -1$. Alors $|x + 1| = -(x + 1)$ et

$$x - 1 \leq \sqrt{-(x + 1)}.$$

Le membre de droite est positif, tandis que $x - 1 < -2$, donc l'inégalité est toujours vraie.

Conclusion :

L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 3]$.

2. Résolution de l'équation

$$\lfloor e^x \rfloor = n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Par définition de la partie entière, cela équivaut à

$$n \leq e^x < n + 1.$$

Si $n \geq 1$, on peut appliquer $\ln$ (strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi, on obtient

$\ln n \leq x < \ln(n + 1)$.

Cette inégalité est valable uniquement si $n \geq 1$ (pour que $\ln n$ soit défini). Si $n < 0$, il n'y a pas de solution car $\exp$ est strictement positive. Enfin, si $n = 0$, on obtient que

$$0 \leq e^x < 1,$$

ce qui revient avoir comme solution $S =]-\infty, 0[$.

Problème : Séquence dans le jeu de Pile ou Face

On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité $p \in (0, 1]$, Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse, dans cette partie, aux séquences (ou séries) de lancers consécutifs qui donnent le même côté.

On dit que la première série (ou séquence) est de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)$ -ième l'autre côté. La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

On notera P_k l'événement « le k -ième lancer a donné Pile ». On note L_k la longueur de la k -ième série (et on convient que $L_k = 0$ s'il n'y a pas de k -ième série et que $L_k = +\infty$ si la série est infinie).

Par exemple, si le début d'une partie conduit à :

$\omega = \text{Pile, Pile, Pile, Face, Face, Face, Face, Pile, Face, Face, Pile, Face, } \dots$

on voit que $L_1(\omega) = 3$, $L_2(\omega) = 4$ et $L_3(\omega) = 1$.

On suppose dans la question 1 que l'on effectue un nombre $N \geq 1$ fixé de lancers. Dans ce cas, si les N premiers lancers sont identiques, alors $L_1 = N$ et $L_2 = 0$ (ainsi que les suivants)

1. Étude de L_1

(a) Calculer, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(L_1 = k)$.

(b) Vérifier que $\sum_{k=1}^N P(L_1 = k) = 1$.

(c) Montrer que

$$\sum_{k=1}^N kP(L_1 = k) = \frac{p^2 + q^2}{pq} - \left(\frac{p^{N+1}}{q} + \frac{q^{N+1}}{p} \right).$$

On suppose désormais que l'on effectue un **nombre infini de lancers**.

2. Montrer que $P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim_{k \rightarrow \infty} P(L_1 = k)$.

3. Ecrire une fonction Python `Somme(n,p)` calculant $\sum_{k=1}^n P(L_1 = k)$.

4. Calculer $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N P(L_1 = k)$.

5. Calculer $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N kP(L_1 = k)$.

Corrigé – Séquence dans le jeu de Pile ou Face

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée ou non :

$$P(\text{Pile}) = p, \quad P(\text{Face}) = q = 1 - p.$$

Une *série* est une suite maximale de lancers successifs donnant le même résultat.

1. Étude de L_1 (nombre de lancers dans la première série)

(a) On suppose tout d'abord que $k \leq N - 1$. On a $L_1 = k$ ssi les k premiers lancers sont identiques, et le $(k + 1)$ -ième différent. Deux cas possibles : on fait k pile, puis une face ; ou alors on fait k face, puis un pile. Ainsi, ces deux événements étant disjoints :

$$P(L_1 = k) = P((P_1, \cap, P_k \cap P_{k+1}^-) \cup (\bar{P}_1, \cap, \bar{P}_k \cap P_{k+1})) = P((P_1, \cap, P_k \cap P_{k+1}^-) + P(\bar{P}_1, \cap, \bar{P}_k \cap P_{k+1}))$$

Les P_i étant indépendants, on a donc :

$$\boxed{P(L_1 = k) = p^k q + q^k p}, \quad 1 \leq k \leq N - 1,$$

et pour $k = N$ (aucun changement avant la fin) :

$$\boxed{P(L_1 = N) = p^N + q^N}.$$

(b) On vérifie :

$$\sum_{k=1}^{N-1} (p^k q + q^k p) + (p^N + q^N) = q(p + p^2 + \dots + p^{N-1}) + p(q + q^2 + \dots + q^{N-1}) + (p^N + q^N).$$

Chaque somme est géométrique, et on utilise que $q = 1 - p$ ainsi que $p = 1 - q$:

$$q \frac{p(1 - p^{N-1})}{1 - p} + p \frac{q(1 - q^{N-1})}{1 - q} + (p^N + q^N) = p - p^N + q - q^N + p^N + q^N = p + q = 1.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^N P(L_1 = k) = 1.}$$

(c) On calcule :

$$\sum_{k=1}^N k P(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{N-1} k(p^k q + q^k p) + N(p^N + q^N).$$

On utilise la formule de la somme pondérée d'une suite géométrique (qui vient de la dérivation de $x \rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^k) :$$

$$\sum_{k=1}^N k r^k = \frac{r(1 - (N+1)r^N + N r^{N+1})}{(1-r)^2}.$$

Après simplification (je vous laisse tout écrire) :

$$\boxed{\mathbb{E}[L_1] = \frac{p^2 + q^2}{pq} - \left(\frac{p^{N+1}}{q} + \frac{q^{N+1}}{p} \right).}$$

2. Cas d'un nombre infini de lancers

Pour $k \geq 1$, le raisonnement appliqué à la question 1.a) au cas $k \leq N - 1$ s'applique de manière identique. Ainsi,

$$\boxed{P(L_1 = k) = p^k q + q^k p.}$$

Puisque $|p| < 1$ et $|q| < 1$, on a donc que $\lim_{k \rightarrow \infty} p^k = \lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$. Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(L_1 = k) = 0.$$

3. Fonction Python Some(n)

```
def Some(n, p):
    q = 1 - p
    s = 0
    for k in range(1, n+1):
        s += p**k * q + q**k * p
    return s
```

4. Calcul de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N P(L_1 = k)$

On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p.$$

Alors, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^N P(L_1 = k) = q \sum_{k=1}^N p^k + p \sum_{k=1}^N q^k.$$

Ce sont des sommes géométriques. En utilisant aussi que $1 - p = q$ et $1 - q = p$,

$$\sum_{k=1}^N P(L_1 = k) = q \frac{p(1 - p^N)}{1 - p} + p \frac{q(1 - q^N)}{1 - q} = p + q - (pq^N + qp^N).$$

Lorsque $N \rightarrow +\infty$, comme $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a $p^N \rightarrow 0$ et $q^N \rightarrow 0$. Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N P(L_1 = k) = p + q = 1.$$

5. Calcul de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N k P(L_1 = k)$

On part de :

$$\sum_{k=1}^N k P(L_1 = k) = q \sum_{k=1}^N k p^k + p \sum_{k=1}^N k q^k.$$

On utilise la formule (obtenue par sommation finie) :

$$\sum_{k=1}^N k r^k = \frac{r(1 - (N+1)r^N + Nr^{N+1})}{(1-r)^2}.$$

On l'applique d'abord à $r = p$, puis à $r = q$:

$$\sum_{k=1}^N k P(L_1 = k) = q \frac{p(1 - (N+1)p^N + Np^{N+1})}{(1-p)^2} + p \frac{q(1 - (N+1)q^N + Nq^{N+1})}{(1-q)^2}.$$

Or $1 - p = q$ et $1 - q = p$, donc :

$$\sum_{k=1}^N k P(L_1 = k) = \frac{p^2 + q^2}{pq} - \frac{qp^{N+1}(Nq + p - 1) + pq^{N+1}(Np + q - 1)}{pq}.$$

Comme $p^{N+1} \rightarrow 0$ et $q^{N+1} \rightarrow 0$, le second terme tend vers 0, donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N k P(L_1 = k) = \frac{p^2 + q^2}{pq}.$$

EM Lyon 2016 : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la suite :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}.$$

1. Ecrire une fonction Python **Suite(n,x)** qui renvoie $S_n(x)$ pour n, x donnés par l'utilisateur.
2. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la suite $(S_n(x))$ diverge.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
 - (a) Montrer que les suites $(S_{2p}(x))_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2p-1}(x))_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.
 - (b) Justifier alors que la suite $(S_n(x))$ converge et que l'on a :

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

- (c) Justifier :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2p}(x) \leq S(x) \leq S_{2p+1}(x) \leq S_{2p-1}(x).$$

- (d) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

On pourra séparer les cas n pair et n impair.

- (e) En déduire une fonction en PYTHON qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.
4. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$S_{2p}(x) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x},$$

puis :

$$S_{2p}(x) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}.$$

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 4, que :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

6. On admet que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Déterminer la valeur de $S(2)$.

Corrigé – EM Lyon 2016 : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On considère, pour tout réel $x \neq 0$, la suite :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}.$$

1. Fonction Python

```
def Suite(n, x):
    s = 0
    for k in range(1, n+1):
        s += (-1)**(k+1) / (k**x)
    return s
```

Cette fonction renvoie la somme partielle $S_n(x)$.

2. Étude du cas $x \in \mathbb{R}^-$

Soit $x < 0$. Alors $k^{-x} = k^{|x|}$, avec $|x| > 0$. La suite $(k^{|x|})_{k \geq 1}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
On a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^{|x|}.$$

Ainsi, les termes successifs de la somme alternent entre des valeurs positives et négatives, de valeur absolue de plus en plus grande.

Étude de la sous-suite (S_{2n}) :

$$S_{2(n+1)}(x) - S_{2n}(x) = (2n+1)^{|x|} - (2n+2)^{|x|}.$$

Or, $(2n+2)^{|x|} > (2n+1)^{|x|}$ puisque la fonction $t \mapsto t^{|x|}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$S_{2(n+1)}(x) - S_{2n}(x) = (2n+1)^{|x|} - (2n+2)^{|x|} < 0.$$

(S_{2n}) est donc strictement décroissante.

Donc, $S_{2n} \leq 1 - 2^{|x|} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étude de la sous-suite (S_{2n+1}) :

$$S_{2(n+1)+1}(x) - S_{2n+1}(x) = -(2n+2)^{|x|} + (2n+3)^{|x|}.$$

Or, $(2n+3)^{|x|} > (2n+2)^{|x|}$, donc :

$$S_{2(n+1)+1}(x) - S_{2n+1}(x) = (2n+3)^{|x|} - (2n+2)^{|x|} > 0.$$

(S_{2n+1}) est strictement croissante.

Donc,

$$S_{2n+1} > S_1 = 1.$$

Ainsi, si (S_n) converge vers une limite finie l , on a que $l \leq 0$ et que $l \geq 1$, ce qui est impossible. Donc, (S_n) ne converge pas. (et ne peut pas tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, puisque la suite des termes pairs est négative et celle des impairs est positive). **3. Étude du cas $x > 0$**

(a) Suites extraites adjacentes.

Pour $x > 0$, on a : $(S_{2p}(x))$ est **croissante** car, pour $p > 0$:

$$S_{2p+2}(x) - S_{2p}(x) = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} > 0,$$

car la fonction $t \rightarrow t^{-x}$ est décroissante. - $(S_{2p-1}(x))$ est **décroissante** car car, pour $p > 0$:

$$S_{2p+1}(x) - S_{2p-1}(x) = -\frac{1}{(2p)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} < 0.$$

De plus, $|S_{2p}(x) - S_{2p-1}(x)| = \frac{1}{(2p+1)^x}$ qui tend vers 0 lorsque $p \rightarrow +\infty$. Ainsi, les suites $(S_{2p}(x))$ et $(S_{2p-1}(x))$ sont **adjacentes**.

$(S_{2p}(x)) \nearrow, (S_{2p-1}(x)) \searrow, S_{2p}(x) < S_{2p-1}(x).$

Par théorème, elles convergent donc vers une même limite. Ainsi, puisque la suite des termes pairs et des termes impairs convergent vers la même limite, on a donc que $(S_n(x))$ converge.

(b) Puisqu'on a établi que $(S_n(x))$ converge vers $S(x)$, par la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

(c) Inégalités encadrantes

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et par proposition des suites alternées :

$$S_{2p}(x) \leq S(x) \leq S_{2p+1}(x) \leq S_{2p-1}(x).$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2p}(x) \leq S(x) \leq S_{2p+1}(x).}$$

(d) Majoration de l'erreur

Grâce à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq S(x) - S_{2n}(x) \leq S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = \frac{1}{(2n+1)^x}.$$

Ainsi, $|S(x) - S_{2n}(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)^x}$. En utilisant aussi la question précédente,

$$\frac{-1}{(2n)^x} = S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) \leq S(x) - S_{2n-1}(x) \leq 0$$

Ainsi, $|S(x) - S_{2n-1}(x)| \leq \frac{1}{(2n)^x}$. On constate que, dans tous les cas,

$$\boxed{|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(e)

def S(x, eps):

 n=1

 s = 0

 while 1/(n+1)**x > eps:

 s += (-1)**(n+1) / (n**x)

 n +=1

 return s

4. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j-1)^x} - \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{j=1}^p \frac{1}{j^x}.$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \left(\sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j-1)^x} + \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x} \right) - 2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - 2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}.$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule précédente avec $p = n$ et $x = 1$ donne, après simplification :

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

En décalant les indices :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k/n} - \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k/n} - \frac{1}{1+k/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n}.$$

6. En utilisant la formule de la question 4. pour $x = 2$, on obtient :

$$S(2) = \left(1 - \frac{1}{2^1} \right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

EDHEC 2016

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

valable pour tout entier naturel n .

1. Dresser le tableau de variation de f , limites comprises.
2. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
3. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Code Python 1 :

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001:
    u = math.exp(-u) / u
    n += 1
print(n)
```

Code Python 2 :

```
u = 1
n = 0
while u < 100000:
    u = math.exp(-u) / u
    n += 1
print(n)
```

4. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = e^{-x} - x^2.$$

- (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une seule solution, que l'on notera α , sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (c) Montrer que :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1.$$

5. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
- (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. On pose :

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.
- (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+^*$.
- (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge puis donner :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}.$$

Corrigé — EDHEC 2016

1.

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

Comme $e^{-x} > 0$ et $x+1 > 0$, on a $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limites : Elles sont usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘ 0

2. Définition et positivité de la suite (u_n)

On a $u_0 = 1 > 0$. Si $u_n > 0$, alors :

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{e^{-u_n}}{u_n} > 0.$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.}$$

Chaque terme de la suite est donc bien défini et strictement positif.

3. Étude expérimentale (interprétation des scripts Python)

Le premier script s'arrête lorsque u_n devient inférieur à 10^{-5} , et affiche $n = 5$. Le second s'arrête lorsque u_n dépasse 10^5 , et affiche $n = 6$.

Cela signifie que :

$$u_5 \approx 0 \quad \text{et} \quad u_6 \text{ est très grand.}$$

On conjecture donc que (u_n) **ne converge pas**, mais oscille des valeurs très petites et des valeurs très grandes.

4. Étude de l'équation $f(x) = x$

4.a La dérivée sur $\mathbb{R}_+$ de g est $x \rightarrow -e^{-x} - 2x$ qui est négative sur $\mathbb{R}_+$. Donc, g est décroissante.

(b) Étude des variations de On définit $h(x) := f(x) - x = \frac{g(x)}{x}$.

$$h'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2} - 1 < 0.$$

$$\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty.$$

Par continuité, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha > 0$.

$$\boxed{\exists! \alpha > 0 \text{ tel que } f(\alpha) = \alpha.}$$

c Le calcul donne $g(1) = f(1) - 1 = e^{-1} - 1 < 0$; et $f(1/e) = e^1 e^{-1/e} - e^{-1} = e^{1-1/e} - e^{-1} \geq 0$. Ainsi, $e^{-1} < \alpha < 1$.

5. Étude des premiers termes et des sous-suites.

(a) On rappelle que $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{e^{-u_n}}{u_n}$ et que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = f(1) = \frac{1}{e} < 1 \quad u_2 = f(u_1) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e} > 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_2 > u_0.}$$

En appliquant f à cette inégalité, et par décroissance de f ,

$$u_3 < u_1.$$

(b) Pour tout n , $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = (f \circ f)(u_n)$.

Comme f est strictement décroissante, $f \circ f$ est strictement *croissante* sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, si $u_{2n} < u_{2n+2}$, alors $u_{2n+4} = h(u_{2n+2}) > h(u_{2n}) = u_{2n+2}$, et de même pour les termes impairs.

On en déduit, grâce à la question précédente faisant office d'initialisation :

$$\boxed{\begin{array}{l} (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante,} \\ (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.} \end{array}}$$

6. Étude de la fonction $h(x) = (f \circ f)(x)$ pour $x > 0$, et $h(0) = 0$.

(a) Pour $x > 0$:

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-e^{-x}/x}}{e^{-x}/x} = x e^{x-e^{-x}/x}.$$

La fonction h est le produit et la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$; elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0.$$

Ainsi, h est continue en 0 par prolongement par continuité :

$$\boxed{h(0) = 0, \text{ et } h \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}.$$

(b) Résolvons $h(x) = x$ pour $x > 0$:

$$h(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x-e^{-x}/x} = 1 \text{ ou } x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - e^{x-e^{-x}/x} = 0 \text{ ou } x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = x \text{ ou } x = 0$$

Donc, les deux solutions sont α définie dans les questions précédentes et 0.

(c) On sait que (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 0, et converge donc vers une limite finie l . Alors, par continuité de h , $u_{2n+3} = h(u_{2n+1}) \rightarrow h(l) = l$. Donc, $l = \alpha$ ou $l = 0$. Or, $u_{2n+1} \leq u_1 < \alpha$ par la question 4.c) . Donc, $l = 0$.

(d) On sait que (u_{2n}) est croissante, et converge donc vers $l \geq 1$ ou tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que (u_{2n}) converge vers une limite finie l . Alors, par continuité de h , $u_{2n+2} = h(u_{2n}) \rightarrow h(l) = l$. Donc, $l = \alpha$ ou $l = 0$. Or, $u_{2n} \geq u_0 > \alpha$ par la question 4.c) . C'est donc absurde. Ainsi, (u_{2n}) tend vers $+\infty$.

Exo 4. (d'après ESCP)

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

1. **Votre succès en dépend !** Pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $A(s)A(t) = A(u)$ avec un nombre réel u dont on déterminera une expression en fonction de s et t .
2. On s'intéresse aux matrices inversibles de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) La matrice $Q = A\left(\frac{1}{2}\right)$ est-elle inversible ? (Justifier soigneusement.)
 - (b) Montrer que la matrice I_3 appartient à $\mathcal{M}$.
 - (c) Pour $t \neq \frac{1}{2}$, montrer que la matrice $A(t)$ est inversible, donner son inverse et vérifier qu'il appartient à $\mathcal{M}$.
3. Déterminer les matrices S de $\mathcal{M}$ solutions de l'équation

$$S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right).$$

4. On rappelle que $J^0 = I_3$ par convention et l'on pose $J = A(-1)$.
 - (a) Montrer qu'il existe une unique suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que

$$A(t_n) = J^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (b) Déterminer une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n pour $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice J^n en la représentant avec ses coefficients.

Exercice D — Corrigé

On considère, pour tout réel t , la matrice :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

1. Calcul de $A(s)A(t)$

On calcule :

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1-s & -s & 0 \\ -s & 1-s & 0 \\ -s & s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

Après multiplication (calcul ligne par colonne) :

$$A(s)A(t) = \begin{pmatrix} 1-(s+t)+2st & -(s+t)+2st & 0 \\ -(s+t)+2st & 1-(s+t)+2st & 0 \\ -(s+t)+2st & (s+t)-2st & 1-2(s+t)+4st \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$A(s)A(t) = A(u) \quad \text{avec} \quad \boxed{u = s + t - 2st.}$$

2. Étude de l'ensemble $\mathcal{M} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(a) On a :

$$Q = A\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La dernière colonne est nulle, donc

$$Q \text{ n'est pas inversible.}$$

(b) Pour $t = 0$, $A(0) = I_3$, donc :

$$I_3 \in \mathcal{M}.$$

(c) Soit $t \neq 1/2$. On cherche $s \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ tel que $s + t - 2st = 0$. On trouve que $t = \frac{t}{2t-1}$ fonctionne. Donc,

$$A(t)^{-1} \in \mathcal{M}.$$

3. Résolution de $S^2 = A(-\frac{3}{2})$.

On cherche $S = A(t)$ tel que $A(t)^2 = A(-\frac{3}{2})$. Or, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t)^2 = A(t)A(t) = A(2t - 2t^2).$$

Ainsi :

$$2t - 2t^2 = -\frac{3}{2} \iff 2t^2 - 2t - \frac{3}{2} = 0.$$

Les solutions sont :

$$t = \frac{1 \pm 4}{2}.$$

Donc :

$$S = A\left(\frac{1 \pm 4}{2}\right).$$

4.(a) Comme la loi de composition sur les paramètres vérifie :

$$A(s)A(t) = A(s + t - 2st),$$

on obtient par récurrence :

$$A(t_{n+1}) = A(t_n)A(-1) = A(t_n - 1 - 2t_n(-1)) = A(1 + 3t_n).$$

Ainsi :

$$t_{n+1} = 1 + 3t_n.$$

L'unicité de la suite (t_n) découle du fait que $t \rightarrow A(t)$ est injective (regarde le premier coefficient de la matrice montre cela).

4.(b) La suite (t_n) est arithmético-géométrique :

$$t_{n+1} = 3t_n + 1.$$

C'est très classique, donc je ne réécris pas toute la démarche. On pose $u_n = t_n + \frac{1}{2}$ afin d'annuler la constante :

$$u_{n+1} = 3u_n, \quad \Rightarrow \quad u_n = 3^n u_0.$$

Comme $t_0 = -1$, on a :

$$u_0 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

donc :

$$u_n = -\frac{3^n}{2}, \quad t_n = u_n - \frac{1}{2} = -\frac{3^n + 1}{2}.$$

$$t_n = -\frac{3^n + 1}{2}.$$

4.(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$J^n = A(t_n) = A\left(-\frac{3^n + 1}{2}\right).$$

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 - t_n & -t_n & 0 \\ -t_n & 1 - t_n & 0 \\ -t_n & t_n & 1 - 2t_n \end{pmatrix}, \quad \text{où } t_n = -\frac{3^n + 1}{2}.$$

4.(d) Compléter le programme suivant qui calcule J^n :

```
def Calcul_Jn(n):  
    J = np.array([[2,1,0],[1,2,0],[1,-1,3]])  
    B = np.eye(3)  
    for k in range(n):  
        B=np.dot(B,J)  
    return B
```