

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres."
SAMUEL JOHNSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

1 Somme et produit télescopique

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Calculer

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}$$

2. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (-2)^k$.

3. En déduire $\sum_{k=1}^n \binom{k}{n} (-2)^k$.

4. Développer $(x+3)^{2n+1}$

5. On suppose $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n 2^k$.

6. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

7. En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

Corrigé – Somme et produit télescopique

1. Calculer $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}$.

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k} = \frac{1}{3^n} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{3^n} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{3^n}.$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k} = \frac{n+1}{3^n}}$$

—

2. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.

Par le binôme de Newton :

$$(1-2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n}$$

—

3. En déduire $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k - \binom{n}{0} (-2)^0 = (-1)^n - 1.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n - 1}$$

—

4. Développer $(x+3)^{2n+1}$.

$$(x+3)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 3^{2n+1-k} x^k.$$

—

5. Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{k=2}^n 2^k$.

Suite géométrique de raison 2 :

$$\sum_{k=2}^n 2^k = 2^2 \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 4(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 4.$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^n 2^k = 2^{n+1} - 4}$$

6. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

6. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

On multiplie les deux membres par $x(x+1)(x+2)$, ce qui donne l'identité polynomiale :

$$a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1) = 2.$$

Développons le membre de gauche :

$$\begin{aligned} a(x+1)(x+2) &= a(x^2 + 3x + 2) = ax^2 + 3ax + 2a, \\ bx(x+2) &= b(x^2 + 2x) = bx^2 + 2bx, \\ cx(x+1) &= c(x^2 + x) = cx^2 + cx. \end{aligned}$$

En additionnant :

$$(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a = 2.$$

Ainsi,

$$(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + (2a-2) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cette égalité est vraie pour tout x si et seulement si chaque coefficient du polynôme est nul :

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ 2a-2=0. \end{cases}$$

Le dernier donne $a=1$, puis :

$$\begin{cases} 1+b+c=0, \\ 3+2b+c=0. \end{cases}$$

On soustrait la première de la seconde : $(3+2b+c) - (1+b+c) = 0 \Rightarrow b = -2$. Enfin, $1-2+c=0 \Rightarrow c=1$.

$$\boxed{a=1, \quad b=-2, \quad c=1.}$$

7. En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.

D'après la question précédente :

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}.$$

Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

On écrit les trois sommes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}.$$

On décale les indices :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j}.$$

D'où, par télescopage :

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} \right).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Exercice 1

1. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -5 \\ u_2 = 13 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_{n+1} + 2u_n$$

- Calculer w_0 et w_1 .
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n$.
- Ecrire une fonction Python **suite(n)** qui renvoie à l'utilisateur la valeur de u_n . On veillera à bien distinguer les cas $n = 0, n = 1, n = 2$.
- Déterminer l'expression de w_n en fonction de n .
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.
- En déduire la définition explicite de la suite (u_n) .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

2. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -5 \\ u_2 = 13 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$

On veillera à ne pas utiliser les résultats de la question précédente.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

On définit aussi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & -5 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Démontrer que $A = PJP^{-1}$

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) En calculant A^n , en déduire ce que vaut u_n en fonction de n .

Corrigé – Exercice 1 Partie 1.

a)

$$w_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 8 = 3, \quad w_1 = u_2 + 2u_1 = 13 - 10 = 3.$$

$$\boxed{w_0 = w_1 = 3.}$$

b) On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2}.$$

Or d'après la relation vérifiée par (u_n) , $u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$. D'où :

$$w_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2}.$$

De même, en remplaçant $u_{n+2} = w_{n+1} - 2u_{n+1}$, on obtient :

$$w_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2(w_{n+1} - 2u_{n+1}) = -u_{n+1} - 2u_n + 2w_{n+1}.$$

En utilisant maintenant que $w_n = u_{n+1} + 2u_n$, on obtient :

$$w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n.}$$

```
c) def suite(n):  
    if n == 0:  
        return 4  
    elif n == 1:  
        return -5  
    T = [4, -5, 13]  
    for k in range(2, n):  
        u = 3*T[-2] - 2*T[-3]  
        T.append(u)  
    return T[-1]
```

d) La relation $w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$ a pour équation caractéristique

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r - 1)^2 = 0.$$

Donc (w_n) est de la forme :

$$w_n = \alpha + \beta n.$$

Or $w_0 = 3$ et $w_1 = 3$, donc :

$$\begin{cases} \alpha = 3, \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0.$$

$$\boxed{w_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}.}$$

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par définition de w_n :

$$u_{n+1} + 2u_n = w_n = 3.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = -2u_n + 3.$$

f) Pour trouver l'expression de u_n en fonction de n , on définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_n + l$, avec un certain l que nous définirons plus tard. On a donc :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + l = -2u_n + l + 3 = -2v_n + 3 + 3l.$$

En prenant $l = -1$, on trouve que $v_{n+1} = -2v_n$. Ainsi, $v_n = (-2)^n v_0 = 3(-2)^n$. Ainsi,

$$u_n = 3(-2)^n + 1.$$

g) **Calcul de la somme partielle**

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (3(-2)^k + 1) = 3 \sum_{k=0}^n (-2)^k + (n+1).$$

On reconnaît une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n (-2)^k = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}.$$

D'où :

$$S_n = 3 \cdot \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} + (n+1) = 1 - (-2)^{n+1} + (n+1) = n+2 - (-2)^{n+1}.$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = n+2 - (-2)^{n+1}.$$

PARTIE 2

a) En multipliant P par la matrice donnée dans cette question, on trouve l'identité. Ainsi, par unicité de l'inverse d'une matrice,

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & -5 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $PP^{-1} = I_3$.

b) **Vérification que $A = PJP^{-1}$.** On calcule d'abord :

$$JP^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 16 & -8 \\ 10 & -19 & -8 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 16 & -8 \\ 10 & -19 & -8 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A.$$

$$A = PJP^{-1}.$$

c) **Lien entre (X_n) et A .**

On a, par définition de X_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Par récurrence immédiate,

$$\boxed{X_n = A^n X_0.}$$

d)

```
def Calcul_Xn(n):
    A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[-2,3,0]])
    X0=np.array([4,-5,13])
    B = np.eye(3)
    for k in range(n):
        B=np.dot(B,A)
    return np.dot(B,X0)
```

e) **Calcul de J^n .** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P(n) : J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Initialisation. Pour $n = 0$:

$$J^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons la formule vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

$$J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$J^{n+1} = J^n J = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit :

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) **Expression de A^n et de u_n .**

Puisque $A = PJP^{-1}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PJ^nP^{-1}.$$

Ainsi :

$$X_n = A^n X_0 = PJ^nP^{-1}X_0.$$

On calcule d'abord

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

On obtient (calcul matriciel explicite) :

$$u_n = 3(-2)^n + 1.$$

$$\boxed{u_n = 3(-2)^n + 1.}$$

Exercice 2 : Probabilités

1. On lance deux dés simultanément.

A : « On obtient deux fois le même résultat » et B : « La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 4 ».

- Décrire les événements de manière ensembliste
- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

2. On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

- On obtient quatre fois le même chiffre.
- On obtient quatre chiffres différents.
- On obtient quatre chiffres qui se suivent.

Corrigé – Exercice 2 : Probabilités

1. On lance deux dés équilibrés à six faces. L'univers est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2, \quad |\Omega| = 36.$$

a) **Description ensembliste.**

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\},$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\}.$$

b) **Calcul des probabilités.**

$$|A| = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$|B| = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$A \cap B = \{(1, 1), (2, 2)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}.$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{18}, \quad P(A \cup B) = \frac{5}{18}.}$$

2. On lance un dé équilibré quatre fois. L'univers a pour cardinal $6^4 = 1296$.

a) **Quatre fois le même chiffre.**

Il y a 6 possibilités (tous les dés identiques) :

$$P = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}.$$

$P(4 \text{ mêmes}) = \frac{1}{216}.$

b) **Quatre chiffres différents.**

On choisit 4 chiffres distincts parmi 6, et on les ordonne :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ issues favorables.}$$

$$P = \frac{360}{6^4} = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}.$$

$P(4 \text{ différents}) = \frac{5}{18}.$

c) **Quatre chiffres qui se suivent.**

Les suites possibles de valeurs distinctes consécutives sont :

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}.$$

Ainsi,

$$P = \frac{3}{6^4}.$$

EXERCICE 3 : Ecricome 2018

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

3. (a) Ecrire une fonction PYTHON prenant en argument un entier $n \geq 2$ et renvoyant la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
(b) En utilisant la fonction ci-dessus, créer une fonction Python **Pluspetit(M)** qui prend en entrée un réel $M > 1$ et qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$.
(c) Justifier qu'il existe des réels λ et μ (que l'on déterminera) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

- (d) En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_{k+1}u_{k+2}}.$$

- (a) On admet que $\left(\frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Démontrer sans calcul explicite que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) De même, démontrer que la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(c) En utilisant les questions précédentes, en déduire que $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire qu'il existe un réel l tel que $S_n \rightarrow l$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
(d) En utilisant le résultat de la question 2, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

- (e) En déduire que

$$1 - \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

Corrigé

1. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or $5 > 1$, donc $\sqrt{5} > 1$ et par conséquent : $\boxed{\varphi > 1}$.

Le discriminant de $X^2 - X - 1$ est $\Delta := 1 - (-4) = 5$. Les racines sont :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Calculons $-\frac{1}{\varphi}$:

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{-2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{-2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{-2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \varphi'.$$

Donc φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n) : u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

- On a $u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1$ donc $u_0 u_2 - u_1^2 = 0 \times 1 - 1^2 = -1 = (-1)^1$. La propriété est vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, i.e. $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Montrons qu'alors la propriété est vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 &= u_n (u_n + u_{n+1}) - u_{n+1}^2 \\
&= u_n^2 + u_n u_{n+1} - u_{n+1}^2 \\
&= u_n^2 - u_{n+1} (u_{n+1} - u_n) \\
&= u_n^2 - u_{n+1} u_{n-1} \\
&= -(u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2) \\
&= -(-1)^n = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

La récurrence a réussi.

(3.a)

```
import numpy as np
```

```
def u(n):
    a=0
    b=1
    for k in range(1,n):
        c=a+b
        a=b
        b=c
    return c
```

(3.b) La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence double dont l'équation caractéristique

$$x^2 - x - 1 = 0$$

admet pour solutions φ et $-\frac{1}{\varphi}$.

Il existe donc deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

Les coefficients vérifient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0, & \text{pour } n = 0, \\ \lambda \varphi + \mu \left(-\frac{1}{\varphi}\right) = 1, & \text{pour } n = 1. \end{cases}$$

D'où

$$\mu = -\lambda, \quad \lambda \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1 \implies \lambda = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1}, \quad \mu = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1}.$$

Ainsi :

$$u_n = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right).$$

(3.c) Comme $\varphi > 1$ Ainsi :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\varphi^1 - (-\varphi)^{-2n-1}}{1 - (-\varphi)^{-2n+1}}.$$

Comme $\varphi > 1$, le dénominateur tend vers 1 et le numérateur vers φ . Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \varphi.$$

4. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

a) Par télescopage, on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{u_{2n+2} u_{2n+3}} - \frac{-1}{u_{2n+1} u_{2n+2}}.$$

En notant $v_n = \frac{1}{u_{n+1} u_{2n}}$, on a par hypothèse que (v_n) est décroissante. Or, $S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1}$. Par décroissance, la différence est négative. Donc, (S_{2n}) est décroissante.

b) Par télescopage, on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{u_{2n+2} u_{2n+3}} - \frac{-1}{u_{2n+3} u_{2n+4}}.$$

En notant $v_n = \frac{1}{u_{n+1} u_{2n}}$, on a par hypothèse que (v_n) est décroissante. Or, $S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+3}$. Par décroissance, la différence est positive. Donc, (S_{2n+1}) est croissante.

c) Par télescopage, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{-1}{u_{2n+1} u_{2n+2}} < 0.$$

Ainsi, $S_{2n+1} - S_{2n} \rightarrow 0$, car $u_n \rightarrow +\infty$. Ainsi, grâce aux deux questions précédentes, on en déduit que ces deux suites sont **adjacentes**, c'est-à-dire que :

$$S_{2n+1} \text{ croît , } S_{2n} \text{ décroît , et } S_{2n} - S_{2n+1} \rightarrow 0.$$

Elles ont donc la même limite l . Par théorème, puisque (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent toutes deux vers l , on a

$$\boxed{S_n \rightarrow l \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.}$$

d) La différence étant télescopique, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}}.$$

De plus, en utilisant la questions 2 dans la dernière égalité :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}}.$$

D'où :

$$\boxed{S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}}$$

e) En sommant cette relation de $n = 0$ à $n = N - 1$, on obtient une somme télescopique :

$$S_N - S_0 = \left(\frac{u_0}{u_1} - \frac{u_N}{u_{N+1}} \right).$$

Or $S_0 = 0$ et $u_0 = 0$, donc :

$$S_N = -\frac{u_N}{u_{N+1}} = 0 - \frac{u_N}{u_{N+1}} = -\frac{u_N}{u_{N+1}}.$$

La suite (S_n) converge vers l , et grâce à la question 3.d), on sait que le rapport à droite tend vers $\frac{1}{\varphi}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{1}{\varphi}.$$

Or :

$$-\frac{1}{\varphi} = -\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\varphi + 1.$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 - \varphi}.$$

Exercice 4 — Étude de fonction

On se propose d'étudier sur $\mathbb{R}^*$ la fonction :

$$f : x \mapsto x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

1. Ecrire une fonction Python `f(x)` qui renvoie $f(x)$. On fera bien attention au domaine de définition de f .
2. On introduit la fonction

$$g : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

- (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et justifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$g'(u) = 1 - g(u)^2.$$

- (b) En déduire que pour tout $u \geq 0$, on a $g(u) - u \leq 0$.
 - (c) Ecrire une fonction Python `g(x)` qui renvoie $g(x)$.
3. Étudier la parité de la fonction f .
 4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) \text{ est du même signe que } g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

5. Préciser les limites :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u}.$$

En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

6. On admet que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Dresser le tableau de variations de f , et tracer l'allure de sa courbe représentative.

7. Soit $y \in]2, +\infty[$. Combien de solutions l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet-elle?

Corrigé – Exercice 4 : Étude de fonction

1. La fonction n'est pas définie en $x = 0$, donc on l'exclut du domaine.

```
import numpy as np

def f(x):
    if x == 0:
        print("x ne doit pas être nul.")
    else:
        return x * (np.exp(1/x) - np.exp(-1/x))
```

2. (a) g est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec dénominateur non nul. On calcule :

$$g'(u) = \frac{(e^u + e^{-u})(e^u + e^{-u}) - (e^u - e^{-u})(e^u - e^{-u})}{(e^u + e^{-u})^2} = \frac{4}{(e^u + e^{-u})^2}.$$

Or :

$$1 - g(u)^2 = 1 - \frac{(e^u - e^{-u})^2}{(e^u + e^{-u})^2} = \frac{(e^u + e^{-u})(e^u + e^{-u}) - (e^u - e^{-u})(e^u - e^{-u})}{(e^u + e^{-u})^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{g'(u) = 1 - g(u)^2.}$$

- (b) La fonction $h : u \rightarrow g(u) - u$ est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables, et, pour $u \in \mathbb{R}$, on a $h'(u) = g'(u) - 1 = -g(u)^2 \leq 0$. Ainsi, cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or, $h(0) = g(0) - 0 = 0$. Donc, pour $u \geq 0$, $h(u) \leq h(0) = 0$. Ainsi, h est négative sur $\mathbb{R}_+$. Par voie de conséquence, pour $u \geq 0$, $g(u) - u \leq 0$.

- (c) **Code Python.**

```
import numpy as np
def g(u):
    return (np.exp(u) - np.exp(-u)) / (np.exp(u) + np.exp(-u))
```

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x) \left(e^{-\frac{1}{-x}} - e^{\frac{1}{-x}} \right) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right) = f(x).$$

f est paire.

4. f est le produit et la composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right) + x \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) = \left(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} \right) \left(-\frac{1}{x} + \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} \right).$$

On reconnaît $g(1/x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$, d'où :

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} \right) \left(-\frac{1}{x} + g\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Le premier terme est positif comme somme d'exponentiel. Ainsi

$$\text{le signe de } f'(x) \text{ est celui de } g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

Or $g(u) - u \leq 0$ pour $u \geq 0$. Donc, f est décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus, en reprenant la notation de la question précédente, on a que $h : x \rightarrow g(x) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(0) = 0$. Ainsi, pour $u \leq 0$, $h(u) \geq h(0) = 0$, et h est donc positive sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, puisque $\frac{1}{x} \leq 0$ lorsque $x < 0$, on obtient que f' est positive sur $\mathbb{R}_-$. Donc, f est décroissante sur $] -\infty, 0[$.

5.

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0.$$

donc :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - e^{-u}}{u} = +\infty.$$

Pour $x \rightarrow 0^+$, on a $1/x \rightarrow +\infty$. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - e^{-u}}{u} = +\infty.$$

f étant paire, on a donc que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.}$$

6. On admet :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2.$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 2$

Courbe : Pas facile de tracer une courbe. Qu'attend l'examineur ? Une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tendant vers $y = 2$ aux infinis, bien croissante, et avec une asymptote verticale en $x = 0$.

7. **Résolution de $f(x) = y$ pour $y \in [2, +\infty[$.**

Soit $y > 2$. La fonction f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers son ensemble image, qui est $]2, +\infty[$. Puisque $y \in]2, +\infty[$, on a donc que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Par parité de f , cette équation admet donc une autre (unique) solution sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, l'équation $f(x) = y$ admet donc deux solutions sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5 : Suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi :

$$u_0 = 1 \quad \forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}.$$

On note aussi $f : x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \sqrt{x + 6}$.

1. Démontrer que u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution.
3. En étudiant la monotonie de f , prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$.
5. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
6. Démontrer que $u_n \rightarrow \alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé – Exercice 5 : Suite récurrente

1. On procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : u_n \geq 0$ et u_n est bien défini.

Initialisation : On a $u_0 = 1 \geq 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Donc, $u_n \geq 0$. Alors $u_n + 6 \geq 6 > 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \geq 0$.

Par récurrence, la suite est bien définie et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.}$$

2. Pour $x \geq 0$, et en utilisant l'injectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ pour la première équivalence :

$$\sqrt{x + 6} = x \iff x^2 = x + 6 \iff x^2 - x - 6 = 0.$$

Les deux racines de ce polynôme sont

$$x = 3 \quad \text{et} \quad x = -2.$$

Sur $\mathbb{R}_+$, seule $x = 3$ convient.

$$\boxed{\alpha = 3.}$$

3. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et, pour $x \geq 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 6}} > 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : u_n \leq u_{n+1}$.

— Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$, donc $P(0)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a donc, par $P(n)$ puis par croissance de f :

$$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

Donc, (u_n) est croissante.

4. On procède aussi par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n) : u_n \leq \alpha$.

— Initialisation : $u_0 = 0 \leq \alpha = 3$ donc $P(0)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. On a donc, par $P(n)$ puis par croissance de f puis par définition de α :

$$u_n \leq \alpha \Rightarrow f(u_n) \leq f(\alpha) \Rightarrow u_{n+1} \leq \alpha$$

Donc, (u_n) est croissante.

5. La suite (u_n) est croissante (question 3) et majorée par α (question 4). D'après le théorème de convergence monotone :

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$$

6. Soit $\ell = \lim u_n$. La fonction f étant continue :

$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell) = \sqrt{\ell + 6}.$$

Ainsi ℓ vérifie $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, donc $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Or $u_n \geq 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.}$$