

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres."
SAMUEL JOHNSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

1 Classiques

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Calculer

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}$$

2. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.

3. En déduire $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.

4. Développer $(x+3)^{2n+1}$

5. On suppose $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n 2^k$.

6. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}.$$

7. En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

8. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

9. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ 5x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

10. Inverser, si possible, par la méthode du pivot de Gauss, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

1. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -5 \\ u_2 = 13 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_{n+1} + 2u_n$$

a) Calculer w_0 et w_1 .

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n$.

c) Ecrire une fonction Python `suite(n)` qui renvoie à l'utilisateur la valeur de u_n . On veillera à bien distinguer les cas $n = 0, n = 1, n = 2$.

d) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n .

e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.

f) En déduire la définition explicite de la suite (u_n) .

g) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

2. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -5 \\ u_2 = 13 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$

On veillera à ne pas utiliser les résultats de la question précédente.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

On définit aussi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & -5 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Démontrer que $A = PJP^{-1}$

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

d) Compléter le programme suivant qui renvoie X_n :

```
import numpy as np
def Calcul_Xn(n):
    A = np.array([...])
    X0=np.array([...])
    B = np.eye(.)
    for k in range(.):
        . = np.dot(.,.)
    return np.dot(B,.)
```

e) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) En calculant A^n , en déduire ce que vaut u_n en fonction de n .

Exercice 2 : Probabilités

1. On lance deux dés à 6 faces simultanément.

A : « On obtient deux fois le même résultat » et B : « La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 4 ».

- Décrire les évènements de manière ensembliste
- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

2. On lance un dé à 6 faces quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

- On obtient quatre fois le même chiffre.
- On obtient quatre chiffres différents.

(c) On obtient quatre chiffres qui se suivent.

EXERCICE 3 : Ecrir 2018

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

On pose enfin $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

3. (a) Ecrire une fonction PYTHON prenant en argument un entier $n \geq 2$ et renvoyant la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
(b) En utilisant la fonction ci-dessus, créer une fonction Python `Pluspetit(M)` qui prend en entrée un réel $M > 1$ et qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$.
(c) Justifier qu'il existe des réels λ et μ (que l'on déterminera) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n.$$

- (d) En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

- (a) On admet que $\left(\frac{1}{u_k u_{k+1}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Démontrer que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) De même, démontrer que la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(c) En utilisant les questions précédentes, en déduire que $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire qu'il existe un réel l tel que $S_n \rightarrow l$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
(d) En utilisant le résultat de la question 2, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

- (e) En déduire que

$$1 - \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

Exercice 4 — Étude de fonction

On se propose d'étudier sur $\mathbb{R}^*$ la fonction :

$$f : x \mapsto x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

1. Ecrire une fonction Python `f(x)` qui renvoie $f(x)$. On fera bien attention au domaine de définition de f .
2. On introduit la fonction

$$g : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

- (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et justifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$g'(u) = 1 - g(u)^2.$$

- (b) En déduire que pour tout $u \geq 0$, on a $g(u) - u \leq 0$.

- (c) Ecrire une fonction Python $g(x)$ qui renvoie $g(x)$.
3. Étudier la parité de la fonction f .
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) \text{ est du même signe que } g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

5. Préciser les limites :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u}.$$

En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

6. On admet que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Dresser le tableau de variations de f , et tracer l'allure de sa courbe représentative.

7. Soit $y \in]2, +\infty[$. Combien de solutions l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet-elle ?

Exercice 5 : Suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi :

$$u_0 = 1 \quad \forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}.$$

On note aussi $f : x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \sqrt{x + 6}$.

- Démontrer que u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution.
- En étudiant la monotonie de f , prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$.
- En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Démontrer que $u_n \rightarrow \alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$.