

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres."
SAMUEL JOHNSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Rappel 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x - 1 \leq \sqrt{|x + 1|}.$$

Rappel 2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\lfloor x^2 \rfloor = n$$

d'inconnue x .

Problème : Séquence dans le jeu de Pile ou Face

On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité $p \in (0, 1]$, Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse, dans cette partie, aux séquences (ou séries) de lancers consécutifs qui donnent le même côté.

On dit que la première série (ou séquence) est de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)$ -ième l'autre côté. La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

On notera P_k l'événement « la k -ième lancer a donné Pile ». On note L_k la longueur de la k -ième série (et on convient que $L_k = 0$ s'il n'y a pas de k -ième série et que $L_k = +\infty$ si la série est infinie).

Par exemple, si le début d'une partie conduit à :

$\omega = \text{Pile, Pile, Pile, Face, Face, Face, Face, Pile, Face, Face, Pile, Face, } \dots$

on voit que $L_1(\omega) = 3$, $L_2(\omega) = 4$ et $L_3(\omega) = 1$.

On suppose dans la question 1 que l'on effectue un nombre $N \geq 1$ fixé de lancers. Dans ce cas, si les N premiers lancers sont identiques, alors $L_1 = N$ et $L_2 = 0$ (ainsi que les suivants)

1. Étude de L_1

(a) Calculer, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(L_1 = k)$.

(b) Vérifier que $\sum_{k=1}^N P(L_1 = k) = 1$.

(c) Montrer que

$$\sum_{k=1}^N kP(L_1 = k) = \frac{p^2 + q^2}{pq} - \left(\frac{p^{N+1}}{q} + \frac{q^{N+1}}{p} \right).$$

On suppose désormais que l'on effectue un **nombre infini de lancers**.

2. Montrer que $P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim_{k \rightarrow \infty} P(L_1 = k)$.

3. Ecrire une fonction Python `Somme(n)` calculant $\sum_{k=1}^n P(L_1 = k)$.

4. Calculer $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N P(L_1 = k)$.

5. Calculer $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N kP(L_1 = k)$.

EM Lyon 2016 : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la suite :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}.$$

1. Ecrire une fonction Python `Suite(n,x)` qui renvoie $S_n(x)$ pour n, x donnés par l'utilisateur.

2. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la suite $(S_n(x))$ diverge.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2p}(x))_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2p-1}(x))_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

(b) En déduire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

(c) Justifier alors que la suite $(S_n(x))$ converge et que l'on a :

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

(d) Justifier :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2p}(x) \leq S(x) \leq S_{2p+1}(x) \leq S_{2p-1}(x).$$

(e) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S(x) - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

On pourra séparer les cas n pair et n impair.

(f) En déduire une fonction en PYTHON qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$S_{2p}(x) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x},$$

puis :

$$S_{2p}(x) = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}.$$

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 3, que :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. On admet que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Déterminer la valeur de $S(2)$.

EDHEC 2016

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

valable pour tout entier naturel n .

1. Dresser le tableau de variation de f , limites comprises.
2. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
3. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Code Python 1 :

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001:
    u = math.exp(-u) / u
    n += 1
print(n)
```

Code Python 2 :

```
u = 1
n = 0
while u < 100000:
    u = math.exp(-u) / u
    n += 1
print(n)
```

4. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = e^{-x} - x^2.$$

- (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une seule solution, que l'on notera α , sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (c) Montrer que :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1.$$

5. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

- (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

6. On pose :

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

- (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+^*$.

- (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

- (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge puis donner :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}.$$

Exo D. (d'après ESCP)

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

- Votre succès en dépend !** Pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $A(s)A(t) = A(u)$ avec un nombre réel u dont on déterminera une expression en fonction de s et t .
- On s'intéresse aux matrices inversibles de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) La matrice $Q = A\left(\frac{1}{2}\right)$ est-elle inversible ? (Justifier soigneusement.)

- (b) Montrer que la matrice I_3 appartient à $\mathcal{M}$.

- (c) Pour $t \neq \frac{1}{2}$, montrer que la matrice $A(t)$ est inversible, donner son inverse et vérifier qu'il appartient à $\mathcal{M}$.

3. Déterminer les matrices S de $\mathcal{M}$ solutions de l'équation

$$S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right).$$

4. On rappelle que $J^0 = I_3$ par convention et l'on pose $J = A(-1)$.

- (a) Montrer qu'il existe une unique suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que

$$A(t_n) = J^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (b) Déterminer une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n pour $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice J^n en la représentant avec ses coefficients.

- (d) Compléter le programme suivant qui calcule J^n :

```
def Calcul_Jn(n):
    J = np.array([...])
    B = np.eye(.)
    for k in range(n):
        . = np.dot(., .)
    return B
```