

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Je crois beaucoup en la chance, et je constate que plus je travaille, plus elle me sourit."
THOMAS JEFFERSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

1 Somme et produit télescopique

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Calculer

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}$$

2. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.

3. En déduire $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.

4. Développer $(x+3)^{2n+1}$

5. On suppose $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n 2^k$.

6. On considère les trois vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Forment-ils une famille libre ou liée de $\mathbb{R}^3$?

7. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(A, B) est-elle une famille libre ou liée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

8. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : MB = BM\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 1 (contrôle technique)

Une entreprise fabrique des pièces techniques. La production n'étant pas parfaite, **5%** de celles-ci sont défectueuses. L'entreprise met ainsi en place un contrôle technique pour éliminer les pièces défectueuses.

Ce contrôle éliminera correctement **95%** des pièces défectueuses et acceptera **90%** des pièces fonctionnelles.

On note, pour une pièce choisie au hasard :

$$\begin{cases} D : \ll \text{la pièce est défectueuse} \gg, \\ A : \ll \text{la pièce est acceptée lors du contrôle} \gg. \end{cases}$$

1. Donner la valeur des probabilités suivantes :

$$P(D), \quad P(\overline{D}), \quad P_D(A), \quad P_D(\overline{A}), \quad P_{\overline{D}}(A), \quad P_{\overline{D}}(\overline{A}).$$

2. Quelle est la probabilité $P(A)$ que la pièce passe le contrôle technique ?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce ayant passé le contrôle technique soit en réalité défectueuse ?

Exercice 2 (étude de fonction, suite)

On considère la fonction suivante :

$$F : x \mapsto 1 - e^{-x},$$

et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(u_n). \end{cases}$$

1. Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il permette de calculer le n -ième terme u_n de la suite (pour un n donné) :

```
import numpy as np

def suite(n):
    u = ...
    ...:
    u = 1 - np ...
    return u
```

2. (a) Étudier le signe de la fonction F' sur son domaine de définition
 (b) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 (c) Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (d) Dresser le tableau de variations de F et tracer l'allure générale de son graphe.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive.
4. (a) Étudier les variations et les limites de la fonction $g : x \mapsto 1 - e^{-x} - x$, et en déduire qu'elle est négative sur $\mathbb{R}$.
 (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente, et donner sa limite.
5. À l'aide de la question 4a, montrer que pour tout $x > 0$, $e^x \geq 1 + x$, et en déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{u_n}.$$

6. Montrer par récurrence que pour tout entier n , $u_{n+1} \geq \frac{1}{n}$.

Exercice 3 (probabilités)

On considère deux urnes U_1 et U_2 . La première contient 4 boules rouges, alors que la seconde contient 2 boules rouges et 2 boules vertes.

Un opérateur lance une pièce équilibrée pour sélectionner une urne : U_1 si le résultat est *pile*, U_2 si le résultat est *face*.

On effectue alors une succession de tirages sans remise dans l'urne sélectionnée.

On note :

$$\begin{cases} P : \ll \text{la pièce tombe sur pile} \gg, & P' = \overline{P}, \\ R_k : \ll \text{la boule tirée au } k\text{-ième tirage est rouge} \gg & (k \in \{1, 2, 3, 4\}). \end{cases}$$

1. Dans un premier temps, on effectue un unique tirage. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
2. On effectue ici un deuxième tirage (toujours sans remise).
 (a) Quelle est la probabilité que l'on ait tiré deux boules rouges de suite ?
 (b) Sachant que l'on a effectivement tiré deux boules rouges, quelle est la probabilité que la pièce soit tombée sur *pile* ?
 (c) Quelle est la probabilité que la seconde boule soit rouge (sans prêter attention à la couleur de la première) ?
3. On continue alors les tirages jusqu'à ce qu'on puisse être certain de l'urne sélectionnée. On note C_k : « à l'issue du k -ième tirage, on est certain(e) de l'urne (et pas avant) » pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 (a) Que vaut $P(C_4)$?
 (b) Comment peut-on réaliser l'événement C_1 ? En déduire sa probabilité.
 (c) Calculer de même $P(C_2)$ et $P(C_3)$.

Exercice 4 : Fonctions et suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

(a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

(c) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n).$$

(d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(e) Compléter la fonction Python suivante qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

Pour cela, on construira une liste L contenant les entiers $\frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à n .

```
import numpy as np
```

```
def suite_u(n):  
    L = [...]  
    u = ...  
    return u
```

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(b) Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. On admet que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel noté γ .

3. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n,$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire une fonction Python **ApproxGamma(epsilon)** qui approche γ à ε près.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx.$$

1. Calculer u_1 .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

On admet que la suite la convergence $Q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge en $+\infty$ vers $\pi^2/6$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

4.a Démontrer que S_n est croissante et majorée par $\pi^2/6$.

4.b. En déduire que S_n converge. On notera γ sa limite en $+\infty$.

4.c. Déterminer les deux réels a, b tels que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}.$$

4.d. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \frac{1}{k} \ln(k).$$

4.e. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

5.a. Justifier que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

5.b. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n .

7. On considère la fonction Python suivante :

```
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n)
    T=sum(L)-np.log(n+1)
    return S, T
```

L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie :

$$(0.5767160812351229, 0.5777155815682065).$$

Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.

Exercice 6 (pour vous entraîner pendant les vacances, à ne pas faire pendant le concours blanc)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & 3^n - 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On détaillera dans l'hérédité le calcul des coefficients situés sur la dernière colonne.

2. Application à l'étude de deux suites

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = 2, \quad b_0 = 0, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n, \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n.$$

(a) Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 au programme suivant pour qu'il affiche la valeur de a_n , l'entier n étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse) ?

```
n = int(input("valeur de n ? "))
a = 2
for i in range(n):
    ...
print(a)
```

- (b) Pour tout entier naturel n , on pose : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

- (c) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n X_0.$$

- (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

Peut-on simplifier l'expression de a_n ou de b_n ?

3. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer PQ . Que peut-on en déduire ?
 (b) Vérifier que $PM P^{-1} = A$.
 (c) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $M^n = P^{-1} A^n P$.
 (d) Déterminer que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. Application au calcul d'une somme

- (a) Montrer que pour tout entier naturel k : $2b_{k+1} = b_{k+1} - b_k - 3^k$.
 (b) Déterminer, pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^n 3^k$.
 (c) Après avoir simplifié $\sum_{k=0}^n b_{k+1} - b_k$, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} - \frac{3^{n+1}}{4} + \frac{1}{4}.$$

5. Étude de la matrice M

- (a) En appliquant le pivot de Gauss, démontrer que M est inversible et que :

$$M^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

- (b) On considère $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On souhaite déterminer les valeurs de X pour lesquelles $MX = 3X$.

Traduire $MX = 3X$ sous forme d'un système et le résoudre.

(Pour info, 3 est appelé valeur propre de M .)