

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Je crois beaucoup en la chance, et je constate que plus je travaille, plus elle me sourit."
THOMAS JEFFERSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

EDHEC ECE 2016, Exercice 2

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

1. Étude de f_n .

- (a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
- (b) En minorant $f_n(x)$, établir que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

- (c) En déduire que, pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que :

$$f_n(u_n) = 1.$$

2. Étude de la suite (u_n) .

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

3. Implémentation Python.

Utiliser la question 2(b) pour compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
import numpy as np

n = 0
while ... :
    n ...
print(n)
```

4. Étude asymptotique.

- (a) On pose $v_n = u_n - n$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

- (b) Établir que, pour tout réel $x \geq -1$, on a :

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

- (c) Vérifier ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).$$

- (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2(b) que :

$$\frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

EDHEC ECS 2017 Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k.$$

- (a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de la fonction `f(x,n)`, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
def f(x, n):  
    y = sum([...])  
    return y
```

- (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ sans utiliser le symbole somme, puis en déduire une deuxième façon de la déclarer, la fonction étant toujours nommée `f` :

```
def f(x, n):  
    if x == 1:  
        y = ...  
    else:  
        y = ...  
    return y
```

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.
- (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge.
- (a) Déterminer α_2 , puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.
(b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ pour établir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0.$$

- (c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.$$

- On suppose que f_n a été déclarée (voir question 1) et on considère les commandes Python suivantes :

```
n = int(input("Entrer la valeur de n : "))  
x = 0.0  
while f(x, n) < 1:  
    x += 0.001  
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

EDHEC 2017 - Matrice

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J , puis écrire A^2 comme combinaison linéaire de I et J .
 - En déduire un polynôme annulateur de A .
 - Montrer que A est inversible.

EM Lyon 2004 ECS, Problème 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **strictement positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **productive**¹ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- M est positive ;
- il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I — Étude d'exemples

1. En considérant

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{montrer que la matrice } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}$$

2. Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas productive.

II — Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III — Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - AP > 0$. On note $p_1, \dots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P .

(a) Montrer que $P > 0$.

(b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \dots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X . On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$,

et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$. Établir que :

$$c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} p_j \right) \geq 0.$$

En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.

1. Les matrices productives ont été inventées par le prix nobel d'économie de 1973, Wassily Leontief, et visent à caractériser l'économie d'un pays en évaluant la quantité de biens qui doit être produite dans chaque secteur et leur prix afin d'assurer une situation d'équilibre : chaque secteur doit pouvoir gagner plus d'argent qu'il ne doit en dépenser pour acheter les autres biens nécessaires à sa production.

- (c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser **III.1.b**). En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
- (a) Montrer que $V - BV > 0$. conclure.
- (b) Donner une caractérisation des matrices productives.
3. **Application :** Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.