

Quelques précisions :

- La copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (**soulignés, surlignés ou encadrés**).

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Je crois beaucoup en la chance, et je constate que plus je travaille, plus elle me sourit."
THOMAS JEFFERSON

DE L'ART DE GAGNER ET PERDRE DES POINTS...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	jusqu'à -2 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
présentation / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
écriture insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

EDHEC ECE 2016

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

1. Étude de f_n .

(a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .

(b) En minorant $f_n(x)$, établir que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

(c) En déduire que, pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que :

$$f_n(u_n) = 1.$$

2. Étude de la suite (u_n) .

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

3. Implémentation Python.

(a) Utiliser la question 2(b) pour compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
import numpy as np

n = 0
while ... :
    n ...
print(n)
```

4. Étude asymptotique.

(a) On pose $v_n = u_n - n$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

(b) Établir que, pour tout réel $x \geq -1$, on a :

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

(c) Vérifier ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).$$

(d) Dédurre de l'encadrement obtenu en 2(b) que :

$$\frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Corrigé

Exercice 1 de EDHEC 2017

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k.$$

- (a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de la fonction `f(x,n)`, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
def f(x, n):  
    y = sum([...])  
    return y
```

- (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ sans utiliser le symbole somme, puis en déduire une deuxième façon de la déclarer, la fonction étant toujours nommée `f` :

```
def f(x, n):  
    if x == 1:  
        y = ...  
    else:  
        y = ...  
    return y
```

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.
- (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge.
- (a) Déterminer α_2 , puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.
(b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ pour établir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0.$$

- (c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.$$

- On suppose que f_n a été déclarée (voir question 1) et on considère les commandes Python suivantes :

```
n = int(input("Entrer la valeur de n : "))  
x = 0.0  
while f(x, n) < 1:  
    x += 0.001  
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Corrigé

EDHEC 2017 - Matrice

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J , puis écrire A^2 comme combinaison linéaire de I et J .
 - En déduire un polynôme annulateur de A .
 - Montrer que A est inversible. Quel est son inverse ? (On l'exprimera en fonction de A)

Corrigé

EM Lyon 2004

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite **strictement positive** si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **productive**¹ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- M est positive ;
- il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I — Étude d'exemples

1. En considérant

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{montrer que la matrice } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}$$

2. Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas productive.

II — Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III — Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - AP > 0$. On note $p_1, \dots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P .

(a) Montrer que $P > 0$.

(b) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \dots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X . On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$,

et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$. Établir que :

$$c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} p_j \right) \geq 0.$$

En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.

1. Les matrices productives ont été inventées par le prix nobel d'économie de 1973, Wassily Leontief, et visent à caractériser l'économie d'un pays en évaluant la quantité de biens qui doit être produite dans chaque secteur et leur prix afin d'assurer une situation d'équilibre : chaque secteur doit pouvoir gagner plus d'argent qu'il ne doit en dépenser pour acheter les autres biens nécessaires à sa production.

- (c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser **III.1.b**). En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
- (a) Montrer que $V - BV > 0$. conclure.
- (b) Donner une caractérisation des matrices productives.
3. **Application :** Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$. Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

Corrigé

Corrige EDHEC 2016

1. Étude de f_n .

- (a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[n; +\infty[$ (comme composée de $t \mapsto \sqrt{t}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ et de $\exp$ continue sur $\mathbb{R}$), elle admet des primitives sur cet intervalle.

La fonction f_n est, en fait, la primitive qui s'annule en n , et à ce titre elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n; +\infty[$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

Il est alors évident que :

$$\forall x \in [n; +\infty[, \quad f'_n(x) > 0,$$

et donc que la fonction f_n est strictement croissante sur $[n; +\infty[$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n; +\infty[$ et pour tout $t \in [n; x]$, on a :

$$\sqrt{t} \geq \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}.$$

Les fonctions concernées sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n; +\infty[, \quad \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt \geq \int_n^x e^{\sqrt{n}} dt = (x - n)e^{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \geq (x - n)e^{\sqrt{n}}.$$

Comme $e^{\sqrt{n}} > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - n)e^{\sqrt{n}} = +\infty$, donc par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur l'intervalle $[n; +\infty[$, la fonction f_n est :

- continue et de classe $\mathcal{C}^1$ (d'après 1a),
- strictement croissante (d'après 1a),
- et à valeurs dans $[f_n(n); +\infty[= [0; +\infty[$ qui contient bien 1 (d'après 1b).

Donc, d'après le théorème de la bijection, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe bien un unique réel $u_n \in [n; +\infty[$ tel que :

$$\boxed{f_n(u_n) = 1.}$$

2. Étude de la suite (u_n) .

- (a) On sait que, pour tout n , $u_n \in [n; +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n.$$

Cette inégalité suffit pour conclure. D'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de u_n :

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt = 1.$$

Pour tout $t \in [n; u_n]$, on a :

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{u_n} \quad \Rightarrow \quad e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}}.$$

Les fonctions concernées étant continues sur $\mathbb{R}_+$, et $u_n > n$, on peut appliquer la croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}.$$

Comme $\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt = 1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq 1 \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}.$$

La première inégalité se réécrit $u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$, soit $u_n \leq n + e^{-\sqrt{n}}$.

La seconde inégalité se réécrit $u_n - n \geq e^{-\sqrt{u_n}}$, soit $u_n \geq n + e^{-\sqrt{u_n}}$. D'où l'encadrement souhaité.

3. **3. a)** On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - n \leq e^{\sqrt{n}},$$

donc pour que $u_n - n \leq 10^{-4}$ soit vrai, il suffit que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$ le soit. Tant que ce n'est pas le cas, il faut passer à l'entier suivant, tout simplement :

```
import numpy as np

n = 0
while np.exp(-np.sqrt(n)) > 0.0001:
    n += 1
print(n)
```

4. On pose $v_n = u_n - n$.

(a) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{u_n} = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

L'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$ (obtenu en 2.b)) et le théorème du même nom, assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

(b) Pour tout $x \geq -1$: $x + 1 \geq 0$, donc l'inégalité $\sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$ est équivalente à :

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Or :

$$\forall x \geq -1, \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} \geq 1 + x.$$

D'où le résultat voulu, par équivalence.

(c) Il faut faire plusieurs essais au brouillon pour voir qu'en appliquant le résultat précédent avec

$$x = \frac{u_n - n}{n} = \frac{v_n}{n} > 0$$

(puisque $u_n > n$), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{\frac{u_n}{n}} \leq 1 + \frac{v_n}{2n} \iff \sqrt{u_n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \iff -\sqrt{u_n} \geq -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}.$$

Ce qui donne bien par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}} = e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).$$

(d) Du résultat précédent et de la question 2.b), on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-\sqrt{n}} \cdot \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq v_n \leq e^{-\sqrt{n}} \iff \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$$

où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (d'après 4.a)), donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = e^0 = 1.$$

Le théorème d'encadrement permet bien de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$$

Corrige Exercice 1 EDHEC 2017

1. (a) Voici :

```
import numpy as np

def f(x, n):
    y = sum([x**k for k in range(1,n+1)])
    return y
```

- (b) On a

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1, \\ n & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Donc on peut écrire :

```
def f(x, n):
    if x == 1:
        y = n
    else:
        y = (x - x ** (n + 1)) / (1 - x)
    return y
```

2. La fonction f_n est polynomiale donc dérivable et on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}.$$

Comme $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} \geq 1 > 0$. Par conséquent, f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$, et comme elle est continue (car dérivable), elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, n]$. Comme 1 appartient à $[0, n]$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.

3. (a) On a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = \sum_{k=1}^n \alpha_n^k + \alpha_n^{n+1} = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}.$$

Comme $\alpha_n \geq 0$, on trouve bien :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1.$$

On a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$ et, par définition de α_{n+1} , on a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$, donc on en déduit :

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_{n+1}(\alpha_n).$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante, on obtient :

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}.$$

Conclusion : $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

- (b) La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.
4. (a) α_2 est la solution de l'équation $x + x^2 = 1$ sur $[0, 1]$. Cette équation s'écrit $x^2 + x - 1 = 0$ et ses solutions sont :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Comme la première de ces deux solutions est strictement négative, on conclut :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

On a $\sqrt{5} < 3$, donc $\alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$, c'est-à-dire $\alpha_2 < 1$. On sait d'après la question 2) que α_2 appartient à $[0, 1]$, donc on a bien :

$$0 \leq \alpha_2 < 1.$$

- (b) La suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leq \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \alpha_2$, et, par croissance de la fonction $t \mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$0 \leq \alpha_{n+1}^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1}.$$

On a montré à la question 4a) que $|\alpha_2| < 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_2^{n+1} = 0.$$

Par encadrement, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{n+1}^{n+1} = 0.}$$

- (c) En revenant à la définition de α_n , on sait que $f_n(\alpha_n) = 1$, et comme α_n est différent de 1, on a :

$$\alpha_n \frac{1 - \alpha_n^n}{1 - \alpha_n} = 1,$$

ce qui s'écrit aussi $\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n$, ou encore :

$$2\alpha_n - 1 = \alpha_n^{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\alpha_n - 1) = 0,$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.}$$

5. Le script proposé cherche la première valeur de x pour laquelle on a $f_n(x) \geq 1$, ce qui implique que celle d'avant (c'est-à-dire $x-0,001$) était telle que $f_n(x-0,001) < 1 \leq f_n(x)$. En remplaçant 1 par $f_n(x-0,001)$, on a donc $f_n(x-0,001) < f_n(x)$. Par stricte croissance de f_n , on obtient :

$$x - 0,001 < \alpha_n \leq x.$$

Conclusion :

$\boxed{\text{Le script proposé donne une valeur approchée de } \alpha_n \text{ à } 0,001 \text{ près par excès.}}$

Corrige EDHEC 2017 - Matrice

1. (a) On a

$$A = \begin{pmatrix} -n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & (1) & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & (1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -n \end{pmatrix} = J - (n+1)I.$$

On en déduit :

$$A = J - (n+1)I.$$

On trouve ensuite (et c'est classique) que $J^2 = nJ$, et comme I et J commutent, on en déduit :

$$A^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2I = nJ - 2(n+1)J + (n+1)^2I.$$

En simplifiant :

$$A^2 = (n+1)^2I - (n+2)J.$$

(b) En remplaçant J par $A + (n+1)I$, on obtient :

$$A^2 = (n+1)^2I - (n+2)(A + (n+1)I) = ((n+1)^2 - (n+1)(n+2))I - (n+2)A.$$

On a donc :

$$\boxed{A^2 = -(n+1)I - (n+2)A.}$$

Un polynôme annulateur de A est donc :

$$P(X) = X^2 + (n+2)X + (n+1).$$

(c) En utilisant le polynôme annulateur $A^2 + (n+2)A + (n+1)I = 0$, on peut exprimer l'inverse de A :

$$A^2 + (n+2)A + (n+1)I = 0 \implies A(A + (n+2)I) = -(n+1)I.$$

En divisant des deux côtés de l'équation par $-\frac{1}{n+1}$; p, trouve que A est inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{n+1}(A + (n+2)I).}$$

Corrige - EM Lyon 2004

Partie I — Étude d'exemples

1. On considère la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est **positive** car ses coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Alors :

$$U - AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $U - AU$ est **strictement positive**.

On en déduit que U est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice $U - AU$ soit strictement positive.

Ceci achève de montrer que :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}$$

2. Notons que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice positive de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On calcule :

$$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le dernier coefficient de $P - BP$ est nul, donc cette matrice n'est pas strictement positive.

Ainsi, il n'existe pas de matrice positive $P \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP$ soit strictement positive.

On en conclut que :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}$$

Partie II — Caractérisation des matrices productives positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que la matrice $M = (m_{ij})$ est positive. Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{ij} \geq 0$.

Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_i \geq 0$.

Posons

$$Y = MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j.$$

Comme $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{ij} \geq 0$ et $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j \geq 0$, on en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i \geq 0.$$

Ainsi, $Y = MX$ est positive.

2. Réciproquement, supposons que pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX soit positif.

Montrons que M est positive.

Fixons j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit

$$E_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

le j -ième élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, défini par :

$$u_j = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}, \quad u_i = 0.$$

Ainsi, E_j est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par hypothèse, ME_j est donc une matrice positive.

Redémontrons que ME_j est la j -ième colonne de M .

Posons :

$$ME_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$v_i = \sum_{k=1}^n m_{ik} u_k = m_{ij} u_j = m_{ij}.$$

On retrouve bien que ME_j est la j -ième colonne de M .

Comme ME_j est positive, on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{ij} \geq 0$.

Ceci étant vrai pour tout élément $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on en déduit que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{ij} \geq 0$. Ainsi, M est bien une matrice positive.

Réciproquement, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice positive $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, MX soit positif, alors M est une matrice positive.

Ainsi, M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \geq 0 \Rightarrow MX \geq 0$.

Partie III — Caractérisation des matrices productives

1. (a) Posons

$$W = AP = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$T = P - AP = \begin{pmatrix} p_1 - w_1 \\ p_2 - w_2 \\ \vdots \\ p_n - w_n \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, $T > 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i - w_i > 0$. Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i > w_i$.

A étant productive, A est positive. Comme P est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $W = AP$ positive d'après la **Partie II, 1**.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i > w_i \geq 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i > 0$.

P est strictement positive.

(a) $X \geq AX$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

En particulier $x_k \geq \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j$. Alors $0 \leq x_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = cp_k - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p_j} a_{kj}p_j$ (car $x_k = cp_k$).

Or $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{x_j}{p_j} \geq c$, et comme $a_{kj} \geq 0$ et $p_j \geq 0$, on a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{x_j}{p_j} a_{kj}p_j \geq ca_{kj}p_j$.

Ceci donne : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $-\frac{x_j}{p_j} a_{kj}p_j \leq -ca_{kj}p_j$. En sommant, il vient :

$$-\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p_j} a_{kj}p_j \leq -c \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j.$$

En ajoutant cp_k , on obtient :

$$cp_k - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p_j} a_{kj}p_j \leq cp_k - c \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j = c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j \right)$$

Or nous avons vu plus haut que $0 \leq cp_k - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p_j} a_{kj}p_j$. A fortiori :

$$0 \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j \right).$$

$P - AP$ est strictement positive, donc tous ses coefficients sont strictement positifs. En particulier, le coefficient de sa k -ième ligne, qui n'est autre que $p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j$, est strictement positif.

Alors $p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j > 0$, et $0 \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j \right)$. Par conséquent, $c \geq 0$.

c est positif ou nul.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{x_i}{p_i} \geq c > 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{x_i}{p_i} > 0$. Or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i > 0$ car P est strictement positive.

Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \geq 0$.

X est positive.

- c. $X = AX$ donc nécessairement $-X = A(-X)$. Le tout permet de dire que $X \geq AX$ et $-X \geq A(-X)$.

Alors ce qui précède montre que X et $-X$ sont des matrices positives. Par conséquent X est nulle.

Si X est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AX = X$ alors X est nulle.

Ceci signifie encore que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (I_n - A)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ce qui est équivalent à dire que $I_n - A$ est inversible.

$I_n - A$ est inversible.

- d. Soit X une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$ et montrons que cette matrice est positive.

$$0 \leq X = (I_n - A)Y = Y - AY \text{ donc } Y \geq AY.$$

D'après **III.1.b**, Y est positive.

Pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive.

Ce qui précède indique que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \geq 0 \Rightarrow (I_n - A)^{-1}X \geq 0$. **II.2.** permet alors de dire que :

$(I_n - A)^{-1}$ est positive.

2. $V = (I_n - B)^{-1}U$ donc $V - BV = (I_n - B)V = U$.

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

étant strictement positive, il en est de même de $V - BV$!

$$V - BV > 0$$

$(I_n - B)^{-1}$ est, par hypothèse, une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $V = (I_n - B)^{-1}U$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

V est finalement une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $V - BV > 0$.

Comme par hypothèse B est positive, on peut alors dire que :

B est productive.

3. Grâce à **III.1** nous pouvons dire que si A est une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est positive, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

III.2 vient de nous montrer que si B est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ est inversible et $(I_n - B)^{-1}$ est positive alors B est productive. Ainsi :

Une matrice A , de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est **productive** si et seulement si :

- (a) A est positive ;
- (b) $I_n - A$ est inversible ;
- (c) $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

4.

$$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + 2M - M - 2M^2 = I_n + 2M - M - M = I_n.$$

$$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n.$$

Alors $I_n - M$ est inversible et son inverse est $I_n + 2M$.

M étant positive, il en est de même de $I_n + 2M$ donc de $(I_n - M)^{-1}$.

M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $I_n - M$ est inversible et son inverse est positive. D'après ce qui précède :

M est productive.
