

Ecricome 2011

Le sujet a été légèrement retravaillé pour être légèrement simplifié. Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier naturel j , on note $P^{(j)}$ la dérivée j -ième de P .

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!} \quad \text{pour} \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

1.(a) Prover que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

1.(b) Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1, \dots, n\}$,

$$P'_k(X+1) = P_{k-1}(X).$$

Démontrer ensuite que $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$.

1..(c) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Démontrer que $P_j^{(j)}(j) = 1$. Puis, démontrer que, pour $k \in \{j+1, \dots, n\}$, $P_k^{(j)}(j) = 0$.

Enfin, démontrer que, pour $k \in \{1, \dots, j-1\}$, $P_k^{(j)}(j) = 0$

1.(d) Soit $P \in E$. Justifier l'existence d'un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n.$$

Puis établir que

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, P^{(j)}(j) = a_j.$$

Ainsi on a établi la relation :

$$\forall P \in E, P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

2.(a) On définit l'application

$$u : E \longrightarrow E, \quad P(X) \longrightarrow P'(X+1)$$

Démontrer que u est linéaire, c'est à dire que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in E, u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$$

2.(b) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Exprimer le polynôme $u(P_k)$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$.

On définit sur $E \times E$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

3.(a) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in E, \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle.$$

3.(b) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, c'est-à-dire :

(i) $\forall P, Q, R \in E$, et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\langle P + Q, R \rangle = \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle,$$

(ii) $\forall P, Q \in E$, et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\langle \alpha P, Q \rangle = \alpha \langle P, Q \rangle,$$

3.(c) Démontrer que :

$$\forall P \in E, \quad \langle P, P \rangle \geq 0$$

3.(d) Démontrer que :

$$\forall P \in E, \quad \langle P, P \rangle = 0 \iff P = 0.$$

3.(e) Démontrer que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Corrigé

Exercice 2

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} . Vérifier la réponse sur votre brouillon.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
3. Déterminer la matrice D^n .
4. Exprimer A en fonction de D , P et P^{-1} .
5. Démontrer une relation entre A^n en fonction de D , P , P^{-1} et n .
6. Écrire la matrice A^n sous la forme d'une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ en fonction de n .
7. Écrire un programme Python appelé `Puissance_Matrix_A(n)` qui calcule A^n .

Corrigé

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + 1$.
5. À l'aide d'un encadrement, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - n = \frac{u_{n-1}}{u_n + n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n)$.
7. Écrire un programme Python appelé `suite_u(n)` qui prend une entrée n en entier et renvoie u_n .

Corrigé

Problème (Ecricome 2018 ECE)

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce truquée et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On admet que cette expérience peut-être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

On notera :

- X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus
- G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie 0

1. On suppose que la bibliothèque `numpy.random` a été importée via l'instruction

```
import numpy.random as rd.
```

On rappelle que :

- `n%2` donne le reste de la division euclidienne d'un entier n par 2. Ainsi : n est pair est équivalent à $n\%2 = 0$.
- `rd.binomial(n,p)` retourne une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Écrire une fonction en Python, nommée `G_sim`, qui prend un entier n et un réel $p \in]0, 1[$ en arguments et qui retourne une simulation de la variable aléatoire G .

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

2. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{27}$.
3. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .
4. Montrer que $\mathbb{E}(G) = -\frac{60}{27}$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$. Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

5. a. On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.
b. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.
6. Rappeler la loi de X et montrer alors que $\mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.
7. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p .
8. Démontrer que : $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff (p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } \ll n \text{ est pair} \gg)$.

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif, c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$, son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$).

9. a. Exprimer G en fonction de X et Y .
b. Montrer que $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbb{P}(X = k)$ puis que $\mathbb{E}(G) = -10np(1 - 2p)^{n-1}$.
10. Démontrer que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

11. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad f(x) = x(1 - 2x)^{n-1}.$$

- b. Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce – c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ – pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Corrigé

Corrigé Ecricome 2011

1.(a) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est un polynôme non nul de degré k . La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés, donc libre. Elle possède $n + 1$ éléments, et $\dim(E) = n + 1$, donc c'est une base de E .

1.(b) On montre d'abord la relation demandée.

Cas $k = 1$. On a $P_1(X) = X$, donc $P'_1(X) = 1$, et ainsi

$$P'_1(X + 1) = 1 = P_0(X) = P_{1-1}(X).$$

Cas $k \in \{2, \dots, n\}$. On a

$$P_k(X) = \frac{1}{k!} X(X - k)^{k-1}.$$

Donc

$$P'_k(X) = \frac{1}{k!} (X - k)^{k-1} + \frac{1}{k!} X(k - 1)(X - k)^{k-2}.$$

En factorisant,

$$P'_k(X) = \frac{1}{k!} (X - k)^{k-2} ((X - k) + (k - 1)X) = \frac{1}{k!} (X - k)^{k-2} (kX - k).$$

Ainsi

$$P'_k(X) = \frac{k}{k!} (X - 1)(X - k)^{k-2} = \frac{1}{(k - 1)!} (X - 1)(X - k)^{k-2}.$$

En évaluant en $X + 1$:

$$P'_k(X + 1) = \frac{1}{(k - 1)!} X(X + 1 - k)^{k-2} = \frac{1}{(k - 1)!} X(X - (k - 1))^{k-2} = P_{k-1}(X).$$

Finalement, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$P'_k(X + 1) = P_{k-1}(X).$$

On démontre ensuite (utile pour la c) et la 3.e)) la formule plus générale :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{0, \dots, k\}, \quad P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j).$$

Récurrence sur j . Pour $j = 0$, c'est $P_k^{(0)}(X) = P_k(X) = P_{k-0}(X - 0)$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $j \leq k - 1$:

$$P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j).$$

En dérivant,

$$P_k^{(j+1)}(X) = (P_{k-j})'(X - j).$$

Or, comme $k - j \geq 1$, on applique la relation précédente à l'indice $k - j$:

$$(P_{k-j})'(Y + 1) = P_{k-j-1}(Y) \quad \text{avec } Y = X - (j + 1),$$

d'où

$$(P_{k-j})'(X - j) = P_{k-j-1}(X - (j + 1)).$$

Ainsi

$$P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-(j+1)}(X - (j + 1)),$$

ce qui achève la récurrence.

Remarque. $\deg(P_k) = k$, donc si $j \geq k + 1$ alors $P_k^{(j)} = 0$.

1.(c) En évaluant la formule précédente en $X = j$ (avec $0 \leq j \leq k$) :

$$P_k^{(j)}(j) = P_{k-j}(0).$$

Or $P_0(0) = 1$ et, pour tout $m \geq 1$, $P_m(X)$ a un facteur X , donc $P_m(0) = 0$. Ainsi, pour $0 \leq j \leq n$:

$$P_j^{(j)}(j) = 1, \quad \text{et si } k \in \{0, \dots, n\}, \quad k > j, \quad \text{alors } P_k^{(j)}(j) = 0.$$

Enfin, si $k < j$, alors puisque P_k est de degré k , on a que $P_k^{(j)} = 0$. On retrouve que $P_k^{(j)}(j)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall j \in \{0, \dots, n\}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P_k^{(j)}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}}$$

- 1.(d)** Soit $P \in E$. Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E , il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^n a_k P_k.$$

Fixons $j \in \{0, \dots, n\}$. En dérivant j fois :

$$P^{(j)} = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(j)} = \sum_{k=j}^n a_k P_k^{(j)}.$$

En évaluant en $X = j$ et en utilisant la question **1.(c)** :

$$P^{(j)}(j) = \sum_{k=j}^n a_k P_k^{(j)}(j) = a_j.$$

Donc, pour tout $P \in E$,

$$P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

- 2.(a)** On définit $u : E \rightarrow E$ par $u(P) = P'(X+1)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. Alors

$$u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'(X+1) = (\lambda P' + Q')(X+1) = \lambda P'(X+1) + Q'(X+1) = \lambda u(P) + u(Q).$$

Donc u est linéaire.

- 2.(b)** On calcule l'image des vecteurs de base. Par la question 1.b) :

$$u(P_0) = P'_0(X+1) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad u(P_k) = P'_k(X+1) = P_{k-1}(X).$$

Ainsi, dans la base $(P_0, \dots, P_n)$:

$$u(P_0) = 0, \quad u(P_1) = P_0, \quad u(P_2) = P_1, \dots, u(P_n) = P_{n-1}.$$

3. (Application bilinéaire $(\cdot, \cdot)$ — sans vocabulaire de produit scalaire)

On définit $(\cdot, \cdot)$ sur $E \times E$ par

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

- 3.(a) Symétrie.** Pour tout $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \langle Q, P \rangle.$$

- 3.(b) Bilinéarité.** Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme la dérivation et l'évaluation sont linéaires :

$$\langle P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^n (P + Q)^{(k)}(k) R^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) R^{(k)}(k) + \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) R^{(k)}(k) = \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle,$$

et

$$\langle \lambda P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n (\lambda P)^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \lambda \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \lambda \langle P, Q \rangle.$$

- 3.(c) Positivité.** Pour tout $P \in E$, puisqu'une somme de réels au carré est positive,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(k))^2 \geq 0.$$

3.(d) Caractère défini positif. Si $\langle P, P \rangle = 0$, alors $\sum_{k=0}^n (P^{(k)}(k))^2 = 0$, donc

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P^{(k)}(k) = 0.$$

Par la formule de décomposition obtenue en **1.(d)** :

$$P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k = \sum_{k=0}^n 0 \cdot P_k = 0.$$

Donc $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0$. La réciproque est évidente.

3.(e) Valeurs $\langle \lambda P_i, P_j \rangle$. D'après **1.(c)**, pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P_i^{(k)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i, \end{cases} \quad P_j^{(k)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Ainsi

$$\langle \lambda P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n P_i^{(k)}(k) P_j^{(k)}(k) = P_i^{(k)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Corrigé Exercice 2

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} (pivot de Gauss).

On calcule l'inverse par réduction de la matrice augmentée :

$$(P \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Opérations élémentaires (sur les lignes) :

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1,$$

d'où

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Puis

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

On élimine ensuite au-dessus du pivot de la colonne 3 :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3,$$

ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = (I_3 \mid P^{-1}).$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

On calcule :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc D est bien diagonale.

3. Déterminer D^n .

Comme $D = \text{diag}(-1, 1, 2)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \text{diag}((-1)^n, 1, 2^n) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

4. Exprimer A puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} .

De $D = P^{-1}AP$ on déduit

$$A = PDP^{-1}.$$

5. Comme $A = PDP^{-1}$, par récurrence **A ECRIRE DANS VOTRE COPIE**,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}.$$

6. Écrire A^n explicitement en fonction de n .

On part de $A^n = PD^nP^{-1}$ avec

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Après multiplication, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^n & (-1)^n - 1 \\ (-1)^n - 1 & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n + 1 \end{pmatrix}.$$

7. Question Python (NumPy) : écrire `Puissance_Matrix_A(n)` qui calcule A^n .

```
import numpy as np

def Puissance_Matrix_A(n):

    A = np.array([[ -1,  3,  3],
                  [  2, -1, -2],
                  [-2,  3,  4]])

    return np.linalg.matrix_power(A, n)
```

Corrigé Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

$$u_1 = \sqrt{1^2 + u_0} = \sqrt{1} = 1, \quad u_2 = \sqrt{2^2 + u_1} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

2. Montrer par récurrence que u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

Posons $P(n)$: « u_n est bien défini et $u_n \geq 0$ ».

— Initialisation : $u_0 = 0$ est bien défini et $u_0 \geq 0$.

— Hérédité : supposons u_n bien défini et $u_n \geq 0$. Alors $n^2 + u_n \geq 0$, donc $\sqrt{(n+1)^2 + u_n}$ a un sens et est ≥ 0 . Ainsi u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \geq 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. En déduire $\lim u_n$.

Pour $n \geq 1$, comme $u_{n-1} \geq 0$,

$$u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}} \geq \sqrt{n^2} = n.$$

Et $u_0 = 0 \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. Comme $n \rightarrow +\infty$, par théorème de comparaison, $u_n \rightarrow +\infty$.

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + 1$.

Posons $Q(n)$: « $u_n \leq n + 1$ ».

— Initialisation : $u_0 = 0 \leq 1$.

— Hérédité : supposons $u_n \leq n + 1$ et $u_n \geq 0$. Alors

$$(n+1)^2 \leq (n+1)^2 + u_n \leq (n+1)^2 + (n+1) = (n+1)(n+2) \leq (n+2)^2.$$

En prenant la racine (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$),

$$n+1 \leq \sqrt{(n+1)^2 + u_n} = u_{n+1} \leq n+2.$$

Donc $u_{n+1} \leq (n+1) + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + 1$.

5. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

Pour $n \geq 1$, on a $n \leq u_n \leq n + 1$, donc

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

6. Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n - n = \frac{u_{n-1}}{u_n + n}$ et en déduire $\lim(u_n - n)$.

Pour $n \geq 1$:

$$u_n - n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + u_{n-1}} - n)(\sqrt{n^2 + u_{n-1}} + n)}{\sqrt{n^2 + u_{n-1}} + n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + n}.$$

Alors

$$u_n - n = \frac{u_{n-1}}{u_n + n} = \frac{\frac{u_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}}{\frac{u_n}{n} + 1}.$$

Or, d'après la question 5, $\frac{u_n}{n} \rightarrow 1$ et aussi $\frac{u_{n-1}}{n-1} \rightarrow 1$, et $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

7. Question Python

```
import numpy as np

def suite_u(n: int) -> float:
    u = 0
    for k in range(1, n + 1):
        u = np.sqrt(k*k + u)
    return u
```

Corrigé Ecricome 2018

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

2. La variable aléatoire X compte le nombre de Piles obtenus en n lancers identiques et indépendants : X suit donc la loi binomiale de paramètres (n, p) .

Pour $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$, l'événement A s'écrit donc : $A = [X = 0] \cup [X = 2]$, donc par union disjointe :

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) = \binom{3}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 1 \times 1 \times \frac{1}{27} + 3 \times \frac{4}{27} = \frac{13}{27}.$$

3. Au vu des règles du jeu, les correspondances entre les valeurs de X et celle de G sont les suivantes :

$$[X = 0] = [G = 0], \quad [X = 1] = [G = -10], \quad [X = 2] = [G = 20], \quad [X = 3] = [G = -30]$$

et comme ce sont les seules valeurs possibles : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, et la loi de G est donnée par :

$$P(G = -30) = P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \quad P(G = -10) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9};$$

$$P(G = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{27}; \quad P(G = 20) = P(X = 2) = \frac{4}{9}.$$

En résumé, la loi de G est donnée par le tableau :

k	-30	-10	0	20
$P(G = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{9}$

4. La variable aléatoire G est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$E(G) = -30 \cdot P(G = -30) - 10 \cdot P(G = -10) + 0 \cdot P(G = 0) + 20 \cdot P(G = 20) = -\frac{80}{9} - \frac{20}{9} + 0 + \frac{80}{9} = -\frac{20}{9}.$$

L'espérance de gain du joueur est négative, donc le jeu ne lui est pas du tout favorable !

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$. Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

5. (a) On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Comme Y prend les valeurs -1 et 1 , alors Z prend les valeurs $\frac{-1+1}{2} = 0$ et $\frac{1+1}{2} = 1$, c'est-à-dire que Z est une variable de Bernoulli, dont la loi est donnée par :

$$\begin{cases} P(Y = 0) = P(Z = -1) = P(\text{"X prend une valeur impaire"}) = P(\bar{A}) \\ \text{et} \quad P(Y = 1) = P(Z = 1) = P(\text{"X prend une valeur paire"}) = P(A) \end{cases}$$

- (b) La variable aléatoire Y est finie, et son espérance vaut :

$$E(Y) = -1 \cdot P(Y = -1) + 1 \cdot P(Y = 1) = -P(\bar{A}) + P(A) = 2P(A) - 1.$$

6. a) Selon le même argument que dans la partie I, X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

b) La relation $Y = (-1)^X$ permet de donner une expression de l'espérance $E(Y)$ issue du théorème de transfert :

$$E(Y) = E((-1)^X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (-1)^x P(X = x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La somme précédente s'écrit aussi :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p + 1 - p)^n = (1 - 2p)^n$$

d'après la formule du binôme de Newton.

7. En identifiant les deux expressions obtenues pour $E(Y)$, on en déduit :

$$2P(A) - 1 = (1 - 2p)^n \iff P(A) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

8. On résout l'inéquation :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \geq \frac{1}{2} \iff 1 + (1 - 2p)^n \geq 1 \iff (1 - 2p)^n \geq 0.$$

La puissance $(1 - 2p)^n$ est bien positive si et seulement si l'argument est positif, ou alors $1 - 2p \geq 0 \iff p \leq \frac{1}{2}$.

Partie III

On cherche à savoir s'il est possible d'avoir à la fois $P(A) \geq \frac{1}{2}$ et $E(G) \leq 0$.

9. a) La variable aléatoire G est égale à $10XY = 10(-1)^X X$: le nombre de Piles obtenus est multiplié par 10, le signe est bien donné par la valeur de $Y = (-1)^X$ qui dépend de la parité de X .

b) Le théorème de transfert donne bien :

$$E(G) = 10E((-1)^X X) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k).$$

On redémontre ici la formule du lemme du pion (on pourrait l'utiliser directement) ; pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

De la relation précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} E(G) &= 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 10 \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\ &\stackrel{[j=k-1]}{=} 10n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^{j+1} (1-p)^{n-j-1} = -10np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^j (1-p)^{n-1-j} \\ E(G) &= -10np(-p + 1 - p)^{n-1} = -10np(1 - 2p)^{n-1}. \end{aligned}$$

10. On sait déjà que $P(A) \leq \frac{1}{2}$ si et seulement si $p \leq \frac{1}{2}$ ou n est pair, donc :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ est pair} \\ -10np(1 - 2p)^{n-1} \leq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} p \leq \frac{1}{2} \\ (1 - 2p)^{n-1} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} n \text{ est pair} \\ (1 - 2p)^{n-1} \geq 0 \end{array} \right\} \\ &\iff p \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} n \text{ est pair} \\ 1 - 2p \geq 0 \text{ car } n - 1 \text{ est alors impair} \end{array} \right\} \iff p \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11. **a)** La fonction $f : x \mapsto x(1 - 2x)^{n-1}$ est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ comme fonction polynômiale, avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f'(x) &= (1 - 2x)^{n-1} + x \cdot (n - 1) \cdot (-2) \cdot (1 - 2x)^{n-2} = (1 - 2x - 2x(n - 1)) \cdot (1 - 2x)^{n-2} \\ &= (1 - 2nx) \cdot (1 - 2x)^{n-2}. \end{aligned}$$

Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $1 - 2x \geq 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2nx$, et :

$$1 - 2nx \geq 0 \iff 2nx \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{2n},$$

d'où le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

b) Pour une valeur de n fixée, en remarquant que : $E(G) = -10n \cdot f(p)$, les variations de f permettent de trouver une valeur maximale atteinte en $p_0 = \frac{1}{2n}$, de sorte que pour tout $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$f(p) \leq f\left(\frac{1}{2n}\right) \iff p(1 - 2p)^{n-1} \leq \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \iff E(G) = -10np(1 - 2p)^{n-1} \geq -\frac{5}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

L'espérance de gain du joueur est minimale, et donc la rentabilité de l'activité du forain est maximale lorsque $p = \frac{1}{2n}$.