

EXERCICE 3 EDHEC ECE 2020

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{X=k}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes Python suivantes (en supposant `import numpy.random as rd`) qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
- `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p ,
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p ,
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
import numpy.random as rd

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
p = float(input('entrez la valeur de p : '))
X = -----
Y = -----
```

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

- b) Écrire, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

- b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j-1} p^j q^{k-j} \right).$$

- c) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$$

- b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3}.$$

- c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

- d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}(Y(Y-1))$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Corrigé

PROBLEME EDHEC ECE 2020

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1 .

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.
 b) En déduire I_2 .
 c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable **b**) et son affichage pour une valeur de $n \geq 2$ entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
def calcul_I(n):
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(2, n + 1):
        aux = a
        a = -----
        b = -----
    return(b)
```

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.
6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .
 b) En déduire la valeur de J_1 .
7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de $n \geq 2$ entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
def calcul_I(n):
    J = np.log(2)
    for k in range(1, n):
        J = -----
        I = -----
    return(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
9. a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
 b) En déduire la nature de la suite $\left(\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- c) Utiliser la question 5) pour déterminer $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{J_n}{\frac{1}{\alpha n}} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

- a) Dédurre des questions précédentes un résultat du type

$$\frac{u_n}{\frac{(-1)^n}{\beta n}} \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

où $\beta > 0$.

- b) Démontrer que la suite $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^k}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de la suite

$$\left(\sum_{n=1}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}} \quad ?^1$$

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on rappelle le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.$$

- b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

- c) Montrer alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2. \quad \text{Conclure.}$$

Corrigé

HEC 2021

Première fois de l'année que vous êtes face à un sujet HEC ! Courage ! Je crois en vous ! Les points comptent double par rapport à l'EDHEC.

Partie 1 – Polynômes factoriels

On note F , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et, pour tout entier naturel r , on note F_r le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r .

On note U_k la fonction $x \mapsto x^k$ avec la convention habituelle $x^0 = 1$, de telle sorte que la base canonique de F_r est notée $(U_0, U_1, \dots, U_r)$.

Soit r un entier naturel. On considère une famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ de fonctions polynomiales de degrés respectifs $d_0, d_1, \dots, d_r$ avec $d_0 < d_1 < \dots < d_r$.

1. a) On suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_r Q_r = 0.$$

En considérant $m = \max\{k \in \llbracket 0, r \rrbracket : \lambda_k \neq 0\}$, démontrer que l'hypothèse précédente est absurde. Qu'a-t-on ainsi démontré ?

- b) À quelle condition la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ est-elle une base de F_r ? (On précisera s'il s'agit d'une condition nécessaire, d'une condition suffisante ou d'une condition nécessaire et suffisante.)

2. Pour tout entier naturel r , le réel « x puissance r descendante » est noté $x^{\underline{r}}$ et défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{\underline{r}} = x(x-1) \times \dots \times (x-r+1) = \prod_{k=0}^{r-1} (x-k)$$

avec la convention $x^{\underline{0}} = 1$. On pose alors

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad V_r : x \mapsto x^{\underline{r}}.$$

Il est clair que V_r appartient à F .

1. Bon, vous ne pouvez pas trop actuellement justifier la nature de la suite $\left(\sum_{n=1}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$, donc pas besoin de justifier. En revanche, vous pouvez répondre à cette question sans justifier en réfléchissant.

- a) Quelles sont les racines de V_r ?
- b) Démontrer que la famille $(V_0, V_1, \dots, V_r)$ est une base de F_r .
- c) Démontrer que, pour tout entier $r \geq 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - x^r + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1}}{(x^{r-1})} = 0$$

(On pourra raisonner par récurrence sur r .) *Je vous rajoute une indication : on peut en déduire que $V_r = X^r - \frac{r(r-1)}{2} X^{r-1} + Q_r$, avec Q_r de degré inférieur ou égal à $r-2$. Si vous le démontrez bien, je vous rajoute un petit bonus*

3. Ici, l'entier $r \geq 1$ est fixé et on compare la famille $(V_k)_{0 \leq k \leq r}$ à la base canonique $(U_k)_{0 \leq k \leq r}$ de l'espace F_r des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à r .

- a) Démontrer qu'il existe une unique famille $(\sigma(r, k))_{0 \leq k \leq r}$ de nombres réels tels que

$$U_r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k.$$

- b) Établir les relations suivantes :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(r, 0) = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(r, 1) = \sigma(r, r) = 1 \quad (2)$$

$$\sigma(r, r-1) = \frac{r(r-1)}{2} \quad (3)$$

$$\forall r \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket \quad \sigma(r, 2) = 2^{r-1} - 1 \quad (4)$$

- c) Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a

$$\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k \sigma(r, k).$$

- d) En déduire que $\sigma(r, k)$ est un entier naturel non nul pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.
- e) On souhaite obtenir, pour chaque entier $r \geq 2$, la liste des coefficients $(\sigma(r, k))_{1 \leq k \leq r}$. Définir en **Python** une fonction, notée **sigma_ligne(r)**, qui prend en argument un entier $r \geq 2$ et qui renvoie un tableau contenant les valeurs $\sigma(r, 1), \sigma(r, 2), \dots, \sigma(r, r)$.

On pourra utiliser la bibliothèque **numpy**. En particulier, la commande **np.ones((n,p))** (après **import numpy as np**) retourne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel r , il existe une unique famille $(s(r, k))_{0 \leq k \leq r}$ de nombres réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^r = \sum_{k=0}^r s(r, k) x^k.$$

- b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad s(r+1, k) = s(r, k-1) - r s(r, k).$$

En déduire la valeur de $s(r, 1)$.

- c) Dédurre de 4.b) que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le signe de $s(r, k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$.
- d) Démontrer que $\sigma(r, r)s(r, r) = 1$ et que

$$\forall \ell \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=\ell}^r \sigma(r, k) s(k, \ell) = 0.$$

- e) Calculer $s(r, r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $s(r, r-1)$ pour tout entier $r \geq 2$.

Corrigé

Corrigé EDHEC 2020

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Urne U : n boules numérotées $1, \dots, n$. On tire une boule, et X est son numéro. Si $X = k$, on effectue k tirages avec remise dans l'urne V (proportion de boules blanches p), et Y est le nombre de boules blanches obtenues.

1. Cas $n = 1$.

Alors U contient uniquement la boule 1, donc $X = 1$ presque sûrement. On fait un seul tirage dans V : Y vaut 1 (succès) avec probabilité p et 0 sinon. On reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre p :

$$Y \sim \mathcal{B}(p)$$

2. Loi de X (cas général).

Les n boules sont équiprobables, donc X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

De plus, par résultat du cours,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

3. Loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

Sachant que l'événement $[X = k]$ est réalisé : on effectue donc k tirages successifs avec remise, donc indépendants, dans l'urne V ; en définissant le fait d'obtenir une boule blanche comme le succès à chaque tirage, la variable aléatoire Y compte alors le nombre de succès dans la répétition de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p .

La loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est donc la loi binomiale de paramètres (k, p) et, pour tout entier i :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Remarque (simulation). L'énoncé rappelait comment simuler des lois discrètes usuelles. Ici, seules les deux simulations suivantes sont nécessaires pour compléter le script : on simule d'abord X selon une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, puis on simule Y suivant une loi binomiale de paramètres (X, p) (c'est-à-dire conditionnellement à la valeur obtenue pour X).

```
import numpy.random as rd as np
n = int(input("entrez la valeur de n : "))
p = float(input("entrez la valeur de p : "))
X = rd.randint(1, n + 1)

Y = rd.binomial(n=X, p=p)
```

La seule subtilité est de bien utiliser la valeur obtenue pour X comme nombre d'épreuves dans la loi binomiale employée ensuite pour simuler Y .

5. Loi de Y : support et probabilités.

a) Comme $X \leq n$ et que $Y \in \{0, \dots, X\}$, on obtient :

$$Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} q^k.$$

Somme géométrique :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

b) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, par la formule des probas totales :

$$\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = i \mid X = k) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

Donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

6. Calcul de $\mathbb{E}(Y)$.

a) (voir le cours pour la démonstration) Pour $1 \leq i \leq k$:

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

b) Comme Y est finie :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

On applique l'identité de (a), on pose $j = i - 1$, on factorise par p , puis la formule du binôme de Newton à la dernière égalité :

$$\sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-1-j} = kp \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} = kp(p+q)^{k-1} = kp.$$

Donc :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp = \frac{p}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}.$$

7. Calcul de $\mathbb{E}(Y(Y-1))$ puis (éventuellement) $\text{Var}(Y)$.

a) pour $i \geq 2$, en appliquant 6.a) deux fois,

$$i(i-1) \binom{k}{i} = k(k-1) \binom{k-2}{i-2}.$$

b) Par un calcul analogue à celui de $\mathbb{E}(Y)$:

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \sum_{i=2}^n i(i-1) \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^k i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

En utilisant (a) puis Newton :

$$\sum_{i=2}^k i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = k(k-1) \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-2-j} = k(k-1) p^2 (p+q)^{k-2} = k(k-1) p^2.$$

Donc :

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right).$$

On simplifie :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} ((2n+1) - 3) = \frac{n(n+1)}{6} (2n-2) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}.$$

c) Lorsque $n = 1$, on a vu que Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p , et donc :

$$\mathbb{E}(Y(Y - 1)) = 0(0 - 1)\mathbb{P}(Y = 0) + 1(1 - 1)\mathbb{P}(Y = 1) = 0,$$

ce qui coïncide bien avec la valeur de $\frac{(n^2 - 1)p^2}{3}$ dans le cas $n = 1$.

d) On remarque (classiquement) que

$$Y(Y - 1) = Y^2 - Y \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = Y(Y - 1) + Y.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y(Y - 1)) + \mathbb{E}(Y).$$

De plus, Y admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(Y(Y - 1)) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2.$$

Ainsi,

$$V(Y) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3} + \frac{(n + 1)p}{2} - \frac{(n + 1)^2 p^2}{4},$$

mais cela n'était pas demandé d'aller plus loin.

Corrigé Problème EDHEC 2020

1. Existence de I_n et J_n .

Pour $x \in [0, 1]$, on a $1 + x \geq 1$, donc $(1 + x)^2 > 0$ et $1 + x > 0$. Les fonctions

$$x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$$

sont continues sur $[0, 1]$, donc intégrables sur $[0, 1]$. Ainsi, I_n et J_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calcul de I_0 et I_1 .

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Pour I_1 , $\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{x+1-1}{(1+x)^2} = \frac{x+1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$. Donc,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right]_0^1,$$

d'où

$$I_1 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \boxed{\ln 2 - \frac{1}{2}}.$$

3. Relation sur (I_n) .

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

(b) Pour $n = 0$:

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 1 - 2 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2} - 2 \ln 2}.$$

(c) **Python (calcul de I_n).** On utilise la récurrence

$$\boxed{I_k = \frac{1}{k-1} - 2I_{k-1} - I_{k-2} \quad (k \geq 2)}$$

avec $I_0 = \frac{1}{2}$ et $I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

```
import numpy as np
def calcul_I(n):
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(2, n+1):
        aux = a
        a = b
        b = 1/(k-1) - 2*b - aux
    return b
```

4. Encadrement de I_n et limite.

(a) Pour $x \in [0, 1]$, $(1+x)^2 \geq 1$, donc

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n.$$

Par croissance et positivité de l'intégrale,

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}}.$$

(b) Par théorème d'encadrement, comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}.$$

Donc (I_n) est convergente et sa limite vaut 0.

5. Lien entre I_n et J_{n-1} (IPP).

Pour $n \geq 1$, on fait une intégration par parties dans $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ en posant

$$u : x \rightarrow x^n, \quad u' : x \rightarrow nx^{n-1}, \quad v' : x \rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}, \quad v : x \rightarrow -\frac{1}{1+x}.$$

On peut bien appliquer l'intégration par partie puisque u et v sont bien $\mathcal{C}^1$. Ainsi :

$$I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}.$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}}.$$

6. Calcul de J_0 et de $J_n + J_{n+1}$.

(a)

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln 2}.$$

Et, par linéarité de l'intégrale,

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

(b) Pour $n = 0$, $J_0 + J_1 = 1$, donc

$$\boxed{J_1 = 1 - \ln 2}.$$

7. Python (calcul de I_n via (J_k)).

De $J_k + J_{k-1} = \frac{1}{k}$ (en remplaçant n par $k-1$ dans la question 6), on tire

$$\boxed{J_k = \frac{1}{k} - J_{k-1} \quad (k \geq 1)}.$$

Puis, par la question 5 :

$$\boxed{I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2} \quad (n \geq 1)}.$$

```
import numpy as np
def calcul_I(n):
    J = np.log(2) # J_0
    for k in range(1, n):
        J = 1/k - J
    I = n*J - 1/2
    return I
```

8. On veut montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule :

$$J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

On procède par récurrence sur n .

Initialisation ($n = 1$). On sait (par le calcul précédent) que $J_1 = 1 - \ln(2)$. Or

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = - \left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1} \right) = -(\ln(2) - 1) = 1 - \ln(2).$$

Donc la formule est vraie au rang 1.

Hérédité. On suppose la formule vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire :

$$J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

On veut établir la formule au rang $n + 1$.

D'après la relation obtenue précédemment (question 6.a) :

$$J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \text{donc} \quad J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n.$$

En remplaçant J_n par l'expression donnée par l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Donc, en factorisant par $(-1)^{n+1}$ et en constatant que $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ est le $(n+1)$ -ème terme de la somme,

$$J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Limites demandées en $+\infty$.

(a) Par la question 5 appliquée à $n + 1$:

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2} \Rightarrow J_n = \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}.$$

Or $I_{n+1} \rightarrow 0$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}.$$

(b) En partant de la formule de la question 8,

$$J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right),$$

et comme $J_n \rightarrow 0$, on obtient la convergence de la suite des sommes partielles :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2}.$$

(c) On cherche $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{J_n}{\frac{1}{\alpha n}} \longrightarrow 1.$$

On écrit

$$nJ_n = \frac{n}{n+1} \left(I_{n+1} + \frac{1}{2} \right) \longrightarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

donc,

$$\boxed{\frac{J_n}{\frac{1}{2n}} \longrightarrow 1}.$$

Ainsi $\alpha = 2$.

10. a) Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

D'après la question 8 :

$$J_n = (-1)^n u_n \quad \Rightarrow \quad u_n = (-1)^n J_n.$$

Comme $\frac{J_n}{\frac{1}{2n}} \rightarrow 1$:

$$\boxed{\frac{u_n}{\frac{(-1)^n}{2n}} \rightarrow 1}.$$

Donc $\beta = 2$.

b) La suite

$$T_N = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{2k}$$

est convergente (c'est une version « facteur $1/2$ » de la question 9.(b)). En revanche, connaître la convergence de T_N ne permet pas, à ce stade, de conclure par rapport à la convergence ou non de

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n,$$

comme le sous-entend la question suivante.

11. **Étude de la suite** $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ (avec sous-suites).

On rappelle : si (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ , alors (S_n) converge vers ℓ .

(a) Soit $k \geq 1$. On utilise l'identité

$$u_{k+1} - u_k = -\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

En multipliant par $(k+1)$:

$$(k+1)u_{k+1} - (k+1)u_k = -(-1)^k,$$

donc

$$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k}.$$

(b) En sommant de $k=1$ à n :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k.$$

La première somme télescope :

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) = (n+1)u_{n+1} - u_1.$$

Et, par somme géométrique,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = -\frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

Donc

$$\boxed{S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)}.$$

(c) On calcule les limites des deux sous-suites. D'après la question 10 :

$$\frac{u_{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}} \rightarrow 1.$$

Donc, en distinguant selon la parité de n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)u_{2n+1} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)u_{2n+2} = +\frac{1}{2}.$$

Or $u_1 = \ln 2 - 1$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \left(-\frac{1}{2}\right) - (\ln 2 - 1) = \boxed{\frac{1}{2} - \ln 2},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \left(+\frac{1}{2}\right) - (\ln 2 - 1) - 1 = \boxed{\frac{1}{2} - \ln 2}.$$

Les deux sous-suites ont la même limite, donc (S_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln 2}.$$

Corrigé HEC 2021

HEC 2021 — Partie 1 : Polynômes factoriels

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. On considère une famille $(Q_0, \dots, Q_r)$ de fonctions polynomiales de degrés respectifs $d_0 < d_1 < \dots < d_r$.

(a) On suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_r Q_r = 0.$$

On pose $m = \max\{k \in \{0, \dots, r\} : \lambda_k \neq 0\}$. Alors

$$\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_m Q_m = 0 \implies \lambda_m Q_m = - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k Q_k.$$

Le membre de droite est une combinaison linéaire de polynômes de degrés $\leq d_{m-1}$, donc il est de degré $\leq d_{m-1}$. Or le membre de gauche a pour degré d_m (car $\lambda_m \neq 0$ et Q_m est de degré d_m). Comme $d_{m-1} < d_m$, c'est impossible.

Donc tous les λ_k sont nuls, et la famille est libre.

$(Q_0, \dots, Q_r)$ est une famille libre.

- (b) Dans F_r , on a $\dim(F_r) = r + 1$. Une famille libre de $r + 1$ éléments de F_r est une base. Démontrons que

$(Q_0, \dots, Q_r)$ est une base de $F_r \iff d_r = r$

$\implies$ On suppose que $(Q_0, \dots, Q_r)$ est une base de F_r . Ainsi, les degrés sont échelonnés. Puisque $(d_0, \dots, d_r)$ est une $(r+1)$ -uplet d'entiers donc chaque entier est strictement plus grand que son prédécesseur, on peut montrer par récurrence rapide que $d_k \geq k$. Donc, on a donc que $d_r \geq r$. Puisque $Q_r \in F_r$, on a que $d_r \leq r$. Donc, $d_r = r$.

$\impliedby$ On suppose maintenant que $d_r = r$. Par hypothèse, puisque la famille est libre et qu'elle contient $r + 1$ éléments, c'est donc une base.

2. Soit $r \in \mathbb{N}$. On considère la famille $(V_0, \dots, V_r)$.

(a) Les racines de $V_r(x) = x(x-1) \cdots (x-r+1)$ sont exactement

$0, 1, \dots, r-1$

 (toutes simples).

- (b) Pour tout $k \in \{0, \dots, r\}$, V_k est un polynôme non nul de degré k . Les degrés sont échelonnés, donc la famille $(V_0, \dots, V_r)$ est libre. Comme elle a $r + 1$ éléments et $\dim(F_r) = r + 1$, c'est une base, cf la question 1 :

$(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r .

(c) Pour $r \geq 2$, on veut établir :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - x^r + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1}}{x^{r-1}} = 0.$$

On va procéder par récurrence sur $r \geq 2$. Pour $r \geq 2$, soit $P(r)$:

$$\exists Q_r \in F_{r-2}, \quad V_r(x) = x^r = x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + Q_r(x),$$

Initialisation ($r = 2$). $x^2 = x(x-1) = x^2 - x$, donc $Q_2 = 0$ convient.

Hérédité. Supposons $V_r(x) = x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + Q_r(x)$ avec $\deg(Q_r) \leq r-2$. Alors

$$V_{r+1}(x) = V_r(x)(x-r) = \left(x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + Q_r(x)\right)(x-r).$$

En développant les deux premiers termes :

$$\left(x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + Q_r(x)\right)(x-r) = x^{r+1} - x^r \left(r + \frac{r(r-1)}{2}\right) + Q_r(x)(x-r) = x^{r+1} - \frac{r(r+1)}{2} x^r + Q_{r+1}(x),$$

avec $Q_{r+1}(x) = (x-r)Q_r(x) + \frac{r^2(r-1)}{2}x^{r-1}$ qui est bien un polynôme de F_{r-1} . Ainsi,

$$V_{r+1}(x) = x^{r+1} - \frac{(r+1)r}{2}x^r + Q_{r+1}(x), \quad \deg(Q_{r+1}) \leq r-1,$$

En divisant par x^{r-1} :

$$\frac{x^r - x^r + \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1}}{x^{r-1}} = \frac{Q_r(x)}{x^{r-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } \deg(Q_r) \leq r-2).$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - x^r + \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1}}{x^{r-1}} = 0}.$$

3. On fixe $r \geq 1$ et on compare la base $(V_k)_{0 \leq k \leq r}$ à la base canonique $(U_k)_{0 \leq k \leq r}$.

(a) Comme $(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r , tout U_r s'y décompose de façon unique :

$$\boxed{\forall r \geq 1, \exists! (\sigma(r, k))_{0 \leq k \leq r} \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad U_r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k}.$$

(b) Relations particulières :

(i) Pour $r \geq 1$, en évaluant en $x = 0$: $U_r(0) = 0$ et $V_0(0) = 1$, $V_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$. Donc $0 = \sigma(r, 0)$, soit

$$\boxed{\sigma(r, 0) = 0 \quad (r \geq 1)}.$$

(ii) Pour $r \geq 1$, $U_1(1) = 1$. De plus, pour $k \geq 2$, $V_k(1) = 0$. Donc, $1 = 0 + \sigma(r, 1)V_1(1) = \sigma(r, 1)$. Donc,

$$\boxed{\sigma(r, 1) = 1}.$$

(iii) Comme V_r est unitaire de degré r , on obtient que

$$\sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k = \sigma(r, r)X^r + A_{r-1},$$

avec A_{r-1} un polynôme de degré inférieur ou égal à $r-1$. Donc, puisque cette somme de polynôme vaut X^r , on en déduit, par identification, que

$$\boxed{\sigma(r, r) = 1}.$$

(iv) En reprenant les notations de la récurrence de la 2.(c), $V_r(x) = x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + Q_r$ et $V_{r-1}(x) = x^{r-1} + B_{r-2}(x)$, avec B_{r-2} un polynôme de degré inférieur ou égal à $r-2$ (valant $Q_{r-1} - \frac{(r-1)(r-2)}{2}X^{r-1}$). Ainsi, par identification du terme de degré $r-1$ dans l'égalité $X^r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k$, on obtient

$$0 = \sigma(r, r) \left(-\frac{r(r-1)}{2} \right) + \sigma(r, r-1) \cdot 1.$$

Puisque $\sigma(r, r) = 1$, on obtient

$$\boxed{\sigma(r, r-1) = \frac{r(r-1)}{2}}.$$

(v) En évaluant la relation en $x = 2$, on obtient que $2^r = \sigma(r, 1)2 + \sigma(r, 2)2(2-1) = 2 + 2\sigma(r, 2)$. Donc,

$$\boxed{\sigma(r, 2) = 2^{r-1} - 1 \quad (r \geq 2)}.$$

(c) Commençons par une petite observation. Pour $k \geq 0$,

$$x^{k+1} = x^k(x-k) = x.x^k - kx^k.$$

Donc,

$$x.x^k = x^{k+1} + kx^k \tag{0}$$

On va maintenant identifier les coefficients de x^{k+1} (dans la base (V_k)) pour trouver la relation donnée par l'énoncé. On a donc tout d'abord

$$x^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \sigma(r+1, k) x^k. \quad (1)$$

On a aussi :

$$x^{r+1} = x \cdot x^r = x \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) x^k.$$

Ainsi, en utilisant l'équation (0) puis en faisant un changement de variable dans la première somme,

$$x^{r+1} = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) x^{k+1} + \sum_{k=0}^r k \sigma(r, k) x^k = \sum_{j=k+1}^{r+1} \sigma(r, k-1) x^k + \sum_{k=0}^r k \sigma(r, k) x^k. \quad (2)$$

On identifie les coefficients de x^k (dans la base (V_k)) dans (1) et dans (2). Ainsi,

$$\boxed{\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k \sigma(r, k)}.$$

(d) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, soit $P(r) : \forall k \in \{1, \dots, r\}, \sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $\sigma(1, 1) = 1$.

Hérédité : Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(r)$. Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, si $\sigma(r, k-1)$ et $\sigma(r, k)$ sont des entiers naturels, alors $\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k \sigma(r, k)$ est un entier naturel comme somme de deux entiers naturels (rapellons que $\sigma(r, 0)$ est un entier par la question (b)), et il est non nul puisque $\sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*$ par $P(r)$. De plus, $\sigma(r+1, r+1) = 1 \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$\boxed{\forall r \geq 1, \forall k \in \{1, \dots, r\}, \sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*}.$$

(e) **Python.** On utilise la relation de récurrence :

$$\forall r \geq 1, \forall k \in \{1, \dots, r\}, \quad \sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k \sigma(r, k),$$

avec les conventions usuelles $\sigma(r, 0) = 0$ et $\sigma(r, k) = 0$ si $k > r$, ainsi que $\sigma(1, 1) = 1$. On construit successivement les lignes $(\sigma(i, 1), \dots, \sigma(i, i))$ pour $i = 1, \dots, r$.

```
import numpy as np

def sigma_ligne(r):
    # M[i, j] représente sigma(i+1, j+1)
    M = np.ones((r, r))

    # Construction des lignes 2, 3, ..., r
    for i in range(1, r):
        # sigma(i+1, 1)=1 et sigma(i+1, i+1)=1
        M[i, 0] = 1
        M[i, i] = 1

        # pour k = 2..i : sigma(i+1, k)=sigma(i, k-1)+k*sigma(i, k)
        for k in range(2, i + 1):
            M[i, k-1] = M[i-1, k-2] + k * M[i-1, k-1]

    # renvoie (sigma(r, 1), ..., sigma(r, r))
    return M[r-1]
```

4. On veut maintenant écrire x^r dans la base canonique (x^k) .

(a) Comme x^r est un polynôme de degré r , il existe une unique famille $(s(r, k))_{0 \leq k \leq r}$ telle que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^r = \sum_{k=0}^r s(r, k) x^k}.$$

(b) On va refaire la technique d'identification dans une vase utilisée à la question 3.c). Tout d'abord,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} s(r+1, k) x^k. \quad (\star)$$

On utilise $x^{r+1} = (x-r)x^r$. Pour la dernière égalité qui suit, on sort les termes extrémaux et on change l'indice.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r+1} s(r+1, k) x^k &= (x-r) \sum_{k=0}^r s(r, k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^r s(r, k) x^{k+1} - r \sum_{k=0}^r s(r, k) x^k \\ &= s(r, r) x^{r+1} - r s(r, 0) + \sum_{k=1}^r (s(r, k-1) - r s(r, k)) x^k. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^k pour $1 \leq k \leq r$:

$$\boxed{\forall k \in \{1, \dots, r\}, \quad s(r+1, k) = s(r, k-1) - r s(r, k)}.$$

En évaluant $(\star)$ en $x = 0$, on trouve que $s(r, 0) = 0$ pour $r \geq 1$ (car le terme de gauche vaut 0, et celui de droite $s(r, 0)$). Donc,

$$s(r+1, 1) = -r s(r, 1).$$

Avec $s(1, 1) = 1$, on obtient par récurrence rapide (faite le si vous avez du mal)

$$\boxed{s(r, 1) = (-1)^{r-1} (r-1)! \quad (r \geq 1)}.$$

(c) On note, pour tout entier $r \geq 1$, la propriété

$$(P(r)) : \quad \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \text{sgn}(s(r, k)) = (-1)^{r+k}.$$

Initialisation. Pour $r = 1$, on a $x^1 = x$, donc $s(1, 1) = 1$. Ainsi $\text{sgn}(s(1, 1)) = +1 = (-1)^{1+1}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $r \geq 1$ et supposons $(P(r))$ vraie. Montrons $(P(r+1))$. Soit $k \in \llbracket 1, r+1 \rrbracket$.

Cas $k = r+1$. On sait que x^{r+1} est un polynôme unitaire de degré $r+1$, donc le coefficient du terme x^{r+1} vaut 1, c'est-à-dire $s(r+1, r+1) = 1$. Ainsi

$$\text{sgn}(s(r+1, r+1)) = +1 = (-1)^{2r+2} = (-1)^{r+1+(r+1)}.$$

Cas $1 \leq k \leq r$. Par la relation de récurrence de la 3.c),

$$s(r+1, k) = s(r, k-1) - r s(r, k).$$

D'après l'hypothèse de récurrence $P(r)$, pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on a :

$$\text{sgn}(s(r, k)) = (-1)^{r+k}.$$

De plus, pour $k \geq 2$, on a aussi

$$\text{sgn}(s(r, k-1)) = (-1)^{r+(k-1)} = -(-1)^{r+k}.$$

Ainsi, pour $k \geq 2$, les réels $s(r, k-1)$ et $s(r, k)$ sont de signes opposés, donc $-r s(r, k)$ a le même signe que $s(r, k-1)$ (car $r > 0$), et par conséquent les deux termes $s(r, k-1)$ et $-r s(r, k)$ ont le même signe. Leur somme est donc non nulle puisque $s(r, k) \neq 0$ par la question 3.d), et a ce même signe :

$$\text{sgn}(s(r+1, k)) = \text{sgn}(s(r, k-1)) = (-1)^{r+k-1}.$$

Or

$$(-1)^{r+k-1} = (-1)^{r+k+1} = (-1)^{r+1+k},$$

donc le résultat est établi pour $k \in \llbracket 2, r \rrbracket$.

Il reste le cas $k = 1$. La relation donne

$$s(r+1, 1) = s(r, 0) - r s(r, 1) = -r s(r, 1),$$

car $s(r, 0) = 0$ pour tout $r \geq 1$ comme vu à la question précédente. Ainsi

$$\operatorname{sgn}(s(r+1, 1)) = \operatorname{sgn}(-s(r, 1)) = -\operatorname{sgn}(s(r, 1)).$$

D'après $P(r)$, $\operatorname{sgn}(s(r, 1)) = (-1)^{r+1}$, donc

$$\operatorname{sgn}(s(r+1, 1)) = -(-1)^{r+1} = (-1)^{r+2} = (-1)^{r+1+1}.$$

On a donc montré que, pour tout $k \in \llbracket 1, r+1 \rrbracket$, $\operatorname{sgn}(s(r+1, k)) = (-1)^{r+1+k}$. Ainsi $(P(r+1))$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $r \geq 1$ et tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$\boxed{\operatorname{sgn}(s(r, k)) = (-1)^{r+k}}.$$

- (d) On va décomposer $(V_r)_{r \in \mathbb{N}}$ dans la base canonique des $(U_r)_{r \in \mathbb{N}}$, puis redécomposer les $(U_r)_{r \in \mathbb{N}}$ dans la base des $(V_r)_{r \in \mathbb{N}}$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a, par la 4.a) puis la 3.a) :

$$V_r = \sum_{k=0}^r s(r, k) U_k = \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^k s(r, k) \sigma(k, l) V_l = \sum_{l=0}^r V_l \sum_{k=l}^r s(r, k) \sigma(k, l).$$

Ainsi donc, par unicité de l'écriture dans une base, on obtient que, pour $l = r$, $s(r, r) \sigma(r, r) = 1$ et que, pour $l < r$,

$$\sum_{k=l}^r s(r, k) \sigma(k, l) = 0.$$

- (e) On a déjà $s(r, r) = 1$ par la relation ci-dessus et la 3.b).(2). Pour $s(r, r-1)$, on utilise la question 4.d) avec $l = r-1$:

$$\sigma(r, r-1) s(r-1, r-1) + \sigma(r, r) s(r, r-1) = 0.$$

En remplaçant par les valeurs connues :

$$\frac{r(r-1)}{2} + s(r, r-1) = 0,$$

soit

$$\boxed{s(r, r-1) = -\frac{r(r-1)}{2}}.$$