

1 Classiques

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

1. Calculer $\left(\frac{1}{4}\right)^n 2^{2n+3}$
2. Calculer $\sum_{k=1}^n (-x)^k$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Calculer

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{3k}$$

4. On considère les trois vecteurs suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Forment-ils une famille libre ou liée de $\mathbb{R}^3$?

5. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(A, B) est-elle une famille libre ou liée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

6. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : MB = BM\}$ est-il un espace vectoriel ?
7. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0, puis que f est prolongeable de manière $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ecricome 2011

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier naturel j , on note $P^{(j)}$ la dérivée j -ième de P .

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!} \quad \text{pour} \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

- 1.(a) Prover que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
- 1.(b) Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1, \dots, n\}$,

$$P'_k(X+1) = P_{k-1}(X).$$

Pas dans le sujet original Démontrer ensuite que $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$.

- 1..(c) *Pas dans le sujet original* Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Démontrer que $P_j^{(j)}(j) = 1$. Puis, démontrer que, pour $k \in \{j+1, \dots, n\}$, $P_k^{(j)}(j) = 0$. Enfin, démontrer que, pour $k \in \{1, \dots, j-1\}$, $P_k^{(j)}(j) = 0$
- 1.(d) Soit $P \in E$. Justifier l'existence d'un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n.$$

Puis établir que

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, P^{(j)}(j) = a_j.$$

Ainsi on a établi la relation :

$$\forall P \in E, P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

2.(a) On définit l'application

$$u : E \longrightarrow E, \quad P(X) \longrightarrow P'(X+1)$$

Démontrer que u est linéaire, c'est à dire que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in E, u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$$

2.(b) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Exprimer le polynôme $u(P_k)$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$.

On définit sur $E \times E$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\langle P, Q \rangle \in E \times E, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

3.(a) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in E, \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle.$$

3.(b) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, c'est-à-dire :

(i) $\forall P, Q, R \in E$, et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\langle P + Q, R \rangle = \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle,$$

(ii) $\forall P, Q \in E$, et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\langle \alpha P, Q \rangle = \alpha \langle P, Q \rangle,$$

3.(c) Démontrer que :

$$\forall P \in E, \quad \langle P, P \rangle \geq 0$$

3.(d) Démontrer que :

$$\forall P \in E, \quad \langle P, P \rangle = 0 \iff P = 0.$$

3.(e) Démontrer que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exercice 2

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} . Vérifiez la réponse sur votre brouillon, car la suite en dépend !
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
3. Déterminer la matrice D^n .
4. Exprimer A en fonction de D , P et P^{-1} .
5. Démontrer une relation entre A^n en fonction de D , P , P^{-1} et n .
6. Écrire la matrice A^n sous la forme d'une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ en fonction de n .
7. Écrire un programme Python appelé `PuissanceMatrix.A(n)` qui calcule A^n .

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + 1$.
5. À l'aide d'un encadrement, justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - n = \frac{u_{n-1}}{u_n + n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n)$.
7. Écrire un programme **Python** appelé **suite_u(n)** qui prend une entrée n en entier et renvoie u_n .
8. En utilisant le programme **suite_u(n)**, écrire un programme **limite(n)** qui renvoie $\frac{u_n - n}{2n}$.

Problème (Ecricome 2018 ECE)

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce truquée et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On admet que cette expérience peut-être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

On notera :

- X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus
- G la variable aléatoire égale au gain algébrique¹ du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie 0

1. On suppose que la bibliothèque `numpy.random` a été importée via l'instruction

```
import numpy.random as rd.
```

On rappelle que :

- $n\%2$ donne le reste de la division euclidienne d'un entier n par 2. Ainsi : n est pair est équivalent à $n\%2 = 0$.
- `rd.binomial(n,p)` retourne une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Écrire une fonction en Python, nommée `G_sim`, qui prend un entier n et un réel $p \in]0, 1[$ en arguments et qui retourne une simulation de la variable aléatoire G .

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

2. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{27}$.
3. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .
4. Montrer que $\mathbb{E}(G) = -\frac{60}{27}$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

1. On appelle gain algébrique un gain qui peut être positif ou négatif.

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$. Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

5. a. On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.
b. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.
6. Rappeler la loi de X et montrer alors que $\mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.
7. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p .
8. Démontrer que : $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff (p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } \ll n \text{ est pair } \gg)$.

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif, c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$, son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$).

9. a. Exprimer G en fonction de X et Y .
b. Montrer que $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbb{P}(X = k)$ puis que $\mathbb{E}(G) = -10np(1 - 2p)^{n-1}$.
10. Démontrer que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

11. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad f(x) = x(1 - 2x)^{n-1}.$$

- b. Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce – c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ – pour optimiser la rentabilité de son activité?

Bonus – Énoncé de Lewis Carroll

Un sac contient un jeton dont on ne connaît pas la couleur, toutefois on sait qu'il est blanc ou noir de manière équiprobable.

On ajoute dans le sac un jeton blanc, on mélange et on tire au hasard l'un des jetons : il est blanc.

On tire le dernier jeton, quelle est la probabilité qu'il soit blanc?