

EDHEC 2020 ECE, Exercice 3

1. Calculer $\left(\frac{1}{4}\right)^n 2^{2n+3}$
2. Calculer $\sum_{k=1}^n (-x)^k$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{X=k}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes Python suivantes (en supposant `import numpy.random as rd`) qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
 - `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
 - `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p ,
 - `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p ,
 - `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
import numpy.random as rd

n = int(input('entrez la valeur de n : '))
p = float(input('entrez la valeur de p : '))
X = -----
Y = -----
```

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

- b) Écrire, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

- b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j-1} p^j q^{k-j} \right).$$

- c) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7. a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$$

- b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3}.$$

- c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

- d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}(Y(Y-1))$ et $\mathbb{E}(Y)$.

PROBLEME EDHEC ECE 2020

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1 .

3.
 - a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.
 - b) En déduire I_2 .
 - c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable **b**) et son affichage pour une valeur de $n \geq 2$ entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
def calcul_I(n):
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(2, n + 1):
        aux = a
        a = -----
        b = -----
    return(b)
```

4.
 - a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.
6.
 - a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .
 - b) En déduire la valeur de J_1 .
7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de $n \geq 2$ entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
def calcul_I(n):
    J = np.log(2)
    for k in range(1, n):
        J = -----
        I = -----
    return(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
9.
 - a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
 - b) En déduire la nature de la suite $\left(\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- c) Utiliser la question 5) pour déterminer $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{J_n}{\frac{1}{\alpha n}} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Dédurre des questions précédentes un résultat du type

$$\frac{u_n}{\frac{(-1)^n}{\beta n}} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

où $\beta > 0$.

b) Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la suite

$$\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}} \quad ?^1$$

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on rappelle le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.$$

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

c) Montrer alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2. \quad \text{Conclure.}$$

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

$$\text{a) } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

$$\text{b) } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

$$\text{c) } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

HEC-ESCP 2021, Problème 1

Première fois de l'année que vous êtes face à un sujet HEC ! Courage ! Je crois en vous ! Les points comptent double par rapport à l'EDHEC.

Partie 1 – Polynômes factoriels

On note F , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et, pour tout entier naturel r , on note F_r le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r .

On note U_k la fonction $x \mapsto x^k$ avec la convention habituelle $x^0 = 1$, de telle sorte que la base canonique de F_r est notée $(U_0, U_1, \dots, U_r)$.

Soit r un entier naturel. On considère une famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ de fonctions polynomiales de degrés respectifs $d_0, d_1, \dots, d_r$ avec $d_0 < d_1 < \dots < d_r$.

1. a) On suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_r Q_r = 0.$$

En considérant $m = \max\{k \in \llbracket 0, r \rrbracket : \lambda_k \neq 0\}$, démontrer que l'hypothèse précédente est absurde. Qu'a-t-on ainsi démontré ?

1. Bon, vous ne pouvez pas trop actuellement justifier la nature de la suite $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$, donc pas besoin de justifier. En revanche, vous pouvez répondre à cette question sans justifier en réfléchissant.

- b) À quelle condition la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ est-elle une base de F_r ? (On précisera s'il s'agit d'une condition nécessaire, d'une condition suffisante ou d'une condition nécessaire et suffisante.)
2. Pour tout entier naturel r , le réel « x puissance r descendante » est noté x^r et défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^r = x(x-1) \times \dots \times (x-r+1) = \prod_{k=0}^{r-1} (x-k)$$

avec la convention $x^0 = 1$. On pose alors

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad V_r : x \mapsto x^r.$$

Il est clair que V_r appartient à F .

- a) Quelles sont les racines de V_r ?
b) Démontrer que la famille $(V_0, V_1, \dots, V_r)$ est une base de F_r .
c) Démontrer que, pour tout entier $r \geq 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - x^r + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1}}{(x^{r-1})} = 0$$

(On pourra raisonner par récurrence sur r .) *Je vous rajoute une indication : on peut en déduire que $V_r = X^r - \frac{r(r-1)}{2} X^{r-1} + Q_r$, avec Q_r de degré inférieur ou égal à $r-2$. Si vous le démontrez bien, je vous rajoute un petit bonus*

3. Ici, l'entier $r \geq 1$ est fixé et on compare la famille $(V_k)_{0 \leq k \leq r}$ à la base canonique $(U_k)_{0 \leq k \leq r}$ de l'espace F_r des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à r .
a) Démontrer qu'il existe une unique famille $(\sigma(r, k))_{0 \leq k \leq r}$ de nombres réels tels que

$$U_r = \sum_{k=0}^r \sigma(r, k) V_k.$$

- b) Établir les relations suivantes :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(r, 0) = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(r, 1) = \sigma(r, r) = 1 \quad (2)$$

$$\sigma(r, r-1) = \frac{r(r-1)}{2} \quad (3)$$

$$\forall r \in \llbracket 2, +\infty \llbracket \quad \sigma(r, 2) = 2^{r-1} - 1 \quad (4)$$

- c) Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a

$$\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k \sigma(r, k).$$

- d) En déduire que $\sigma(r, k)$ est un entier naturel non nul pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

- e) On souhaite obtenir, pour chaque entier $r \geq 2$, la liste des coefficients $(\sigma(r, k))_{1 \leq k \leq r}$. Définir en **Python** une fonction, notée **sigma_ligne(r)**, qui prend en argument un entier $r \geq 2$ et qui renvoie un tableau contenant les valeurs $\sigma(r, 1), \sigma(r, 2), \dots, \sigma(r, r)$.

On pourra utiliser la bibliothèque **numpy**. En particulier, la commande **np.ones((n,p))** (après **import numpy as np**) retourne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel r , il existe une unique famille $(s(r, k))_{0 \leq k \leq r}$ de nombres réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^r = \sum_{k=0}^r s(r, k) x^k.$$

- b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad s(r+1, k) = s(r, k-1) - r s(r, k).$$

En déduire la valeur de $s(r, 1)$.

- c) Dédurre de 4.b) que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le signe de $s(r, k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$.
d) Démontrer que $\sigma(r, r)s(r, r) = 1$ et que

$$\forall \ell \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=\ell}^r \sigma(r, k) s(k, \ell) = 0.$$

- e) Calculer $s(r, r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $s(r, r-1)$ pour tout entier $r \geq 2$.