

Exercice 1

Six questions indépendantes

1. Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y + z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

2. Soit

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P \longmapsto XP' - P.$$

(a) Montrer que f est bien définie, c'est-à-dire que f est à bien valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Considérons l'application :

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x - y).$$

(a) Écrire une fonction Python nommée **g** prenant deux réels x et y en arguments et retournant la valeur de $g(x, y)$.

(b) Montrer que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que g est une application bijective.

4. Considérons l'application :

$$\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t) dt \right).$$

(a) Justifier que φ est bien à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Justifier que φ est une application linéaire.

(c) Justifier que φ n'est pas surjective.

5. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x t \arctan(t) dt = \frac{1}{2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x).$$

On notera que cela nous fournit une primitive de $x \mapsto x \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) À l'aide du changement de variable $t = x^2$ et de la question précédente, montrer que :

$$\int_0^3 \arctan(\sqrt{t}) dt = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

6. Montrer par le calcul que :

$$\ln(n!) \sim n \ln(n).$$

AIDE : Pensez à la comparaison série-intégrale ! Cette question est très valorisée dans le barème.

7. Ecrire une fonction Python appelée **facto(n)** qui calcule $n!$.

Correction

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x) dx$.

1. (a) Rappeler la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

(b) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k + I_{k+1} = \frac{1}{2k+1}$.

AIDE : Ecrivez au brouillon ce que vaut la dérivée de u^n .

2. Montrer alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

3. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

(b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge.

(c) À l'aide de la question 1.b déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Déterminer alors, à l'aide de la question 2,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Correction

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 3 boules : une blanche, une rouge et une verte. On effectue n tirages successifs avec remise.

Si $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on dit qu'il y a changement de couleur au i ème tirage si la i ème boule tirée est d'une couleur différente de la $(i-1)$ ème boule.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de changement de couleur intervenants au cours des n tirages.

- (a) Montrer soigneusement que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
(b) Donner l'espérance et la variance de X . Ici, l'examineur n'attend pas la preuve, juste le résultat du cours.
- Recopier la fonction `X` donnée ci-dessous et compléter ses lignes 6, 9 et 11 pour que celle-ci retourne une simulation de la variable aléatoire X .

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 def X(n): # n est un entier désignant le nbr de tirages effectués
4     couleur=rd.randint (1 ,4)
5     C=0 # C désignera le nbr de changements de couleur
6     for k in range( ):
7         couleur_2=rd.randint (1 ,4)
8         if couleur != couleur_2:
9             ....
10        couleur= couleur_2
11    return ...
```

- Écrire une fonction en Python nommée `Esp` prenant n et N deux entiers naturels en argument et retournant une approximation de $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de N réalisations de X .

Correction

Exercice 4

On définit l'application cosinus hyperbolique, noté ch , par :

$$\text{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Étudier la parité de la fonction ch .
- Montrer que ch est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$.
On note $\text{argch} : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ la bijection réciproque de la fonction ch .
- (a) Montrer que argch est dérivable sur $]1; +\infty[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\text{ch}(x))^2 - (\text{ch}'(x))^2 = 1$.
(c) En déduire que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Correction

Exercice 5

PARTIE A

Les deux questions de cette partie A sont indépendantes.

- Dans cette question, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on définit les deux applications :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, 2x + y, -x + z)$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, -2x - 2y - 2z, x + y + z).$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On admettra que g en est de même un.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(g)$.

- (c) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$, et une base de $\text{Im}(g)$.
 Rappel Si $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple la base canonique) alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$
 Déterminer ensuite une base de $\text{Im}(f)$.
- (d) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
- (e) En déduire qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que $f \circ g - g \circ f = \alpha g$.
2. Dans cette question, on se place sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ où n est un entier supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'application :

$$f_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto AM.$$

- (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que f_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
- (b) Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = f_{AB-BA}$.
 - En déduire très soigneusement que :

$$f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B \iff AB - BA = \alpha B.$$

AIDE Pour l'implication de gauche à droite, avec quel M évaluer $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A$ pour tomber sur $AB - BA$?

PARTIE B - ÉTUDE GÉNÉRALE

Dans cette partie, on revient à une étude générale. On se donne E un espace vectoriel et un réel α . On notera id_E l'endomorphisme identité sur E . On se donne également f et g deux endomorphismes de E qui vérifient :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha g \quad (\star)$$

- Montrer que $\text{Ker}(g)$ est stable par f c'est-à-dire que : $\forall x \in \text{Ker}(g), f(x) \in \text{Ker}(g)$.
 - Montrer que : $\forall x \in \text{Ker}(f), g(x) \in \text{Ker}(f - \alpha \text{id}_E)$.
 - Montrer que : $\forall x \in \text{Im}(g), f(x) \in \text{Im}(g)$.
- On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$. Montrer que, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Ker}(g - \mu \text{id}_E) = \{0_E\}.$$

- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ g^n - g^n \circ f = n\alpha g^n \quad (\star\star).$$

- Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$. On note θ l'endomorphisme nul de E .
 - On suppose que $f^2 = f$. Montrer que $f \circ g \circ f = \theta$.
 - On suppose réciproquement que $f \circ g \circ f = \theta$.
 - Montrer que $f^2 \circ g = f \circ g$.
 - En déduire que, si l'endomorphisme g est surjectif, alors $f^2 = f$.

Correction

Correction exercice 1

1. On résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 3z \\ 3x - 2y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3z \\ -8y = -10z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3z \\ y = \frac{5}{4}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z - \frac{5}{2}z \\ y = \frac{5}{4}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{5}{4}z \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y + z = 0\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{2}z, \frac{5}{4}z, z \right) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1 \right) \right) = \text{Vect}((2, 5, 4)). \end{aligned}$$

On peut déduire de cela que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Cela prouve également que la famille $\mathcal{F} = ((2, 5, 4))$ est génératrice de F .

De plus le vecteur $(2, 5, 4)$ étant non nul, la famille $\mathcal{F} = ((2, 5, 4))$ est libre.

Comme la famille $\mathcal{F} = ((2, 5, 4))$ est génératrice de F , elle en forme également une base.

2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto XP' - P \end{aligned}$$

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrons que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On sait que $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n - 1$ et donc $\deg(XP') \leq n$.

Ainsi $\deg(XP' - P) \leq \max(\deg(XP'), \deg(P))$ et donc $\deg(XP' - P) \leq n$.

Cela prouve que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q) \\ &= \lambda XP' + XQ' - \lambda P - Q && \text{par linéarité de la dérivée} \\ &= \lambda(XP' - P) + XQ' - Q \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Cela prouve que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 2y, 3x - y) \end{aligned}$$

(a) Écrire une fonction Python nommée `g` prenant deux réels `x` et `y` en arguments et retournant la valeur de $g(x, y)$.

```
def g(x,y):  
    return(x+2*y ,3*x-y)
```

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit (x, y) et (x', y') deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(\lambda(x, y) + (x', y')) &= g((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ &= (\lambda x + x' + 2(\lambda y + y'), 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y')) \\ &= \lambda(x + 2y, 3x - y) + (x' + 2y', 3x' - y') \\ &= \lambda g(x, y) + g(x', y') \end{aligned}$$

On trouve bien que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(c) Pour montrer que g est une application bijective, nous allons montrer que son noyau est réduit au vecteur nul. Soit $(x, y) \in \text{Ker}(g)$. On a :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système,

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -7y = 0 \end{cases}.$$

Les coefficients diagonaux étant non nuls ce système est de Cramer. Donc, g est injective, et est donc bijective puisqu'on travaille en dimension finie.

4. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t) dt \right) \end{aligned}$$

(a) Montrons que φ est bien à valeur dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Comme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ le **théorème fondamental de l'analyse** nous assure que $x \longmapsto \int_0^x f(t) dt$ est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Cela nous assure que φ est bien à valeur dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Montrons que φ est une application linéaire. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f + g)(x) &= \int_0^x (\alpha f + g)(t) dt \\ &= \int_0^x (\alpha f(t) + g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \alpha \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Cela prouve que $\varphi(\alpha f + g) = \alpha \varphi(f) + \varphi(g)$. Et donc que φ est une application linéaire.

(c) Pour tout $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la fonction $\varphi(f)$ est une fonction qui s'annule en 0.

Dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ il existe des fonctions qui ne s'annule pas en 0. Par exemple $t \longmapsto \cos(t)$.

Une telle fonction ne peut donc pas avoir d'antécédent par φ . φ n'est donc pas surjective.

5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$ On pose pour $x \in [0, t]$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \arctan(x) & u'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) &= x & v(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont bien C^1 sur $[0, t]$, on peut réaliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^t x \arctan(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} t^2 \arctan(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} t^2 \arctan(t) - \frac{1}{2} [x - \arctan(x)]_0^t \\ &= \frac{1}{2} t^2 \arctan(t) - \frac{1}{2} (t - \arctan(t)) \\ &= \frac{1}{2} (t^2 \arctan(t) - t + \arctan(t)) \\ &= \frac{1}{2} ((t^2 + 1) \arctan(t) - t) \end{aligned}$$

(b) Considérons la fonction $\varphi : [0, \sqrt{3}] \longrightarrow [0, 3]$,

$$x \longmapsto x^2.$$

La fonction φ est une fonction C^1 sur $[0, \sqrt{3}]$. Elle est strictement croissante, et le changement de variable est donc licite.

De plus $dt = 2x dx$.

Effectuons le changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arctan(\sqrt{t}) dt &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan(x) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \left((t^2 + 1) \arctan(t) - t \right) \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \left[\left((t^2 + 1) \arctan(t) - t \right) \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 4 \arctan(\sqrt{3}) - \sqrt{3} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

6. Soit $n \geq 2$. On écrit

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue et croissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout entier $k \geq 2$, et par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \ln(t) dt \geq \ln(k) \quad \text{et} \quad \int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k).$$

En sommant de $k = 2$ à n , (NOTEZ UNE CHOSE : je somme à partir de 2 car $\ln(1) = 0$, et pour ne pas avoir à intégrer le logarithme entre 0 et 1 - le logarithme n'étant pas continue en 0)

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \ln \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(t) dt = \int_1^n \ln(t) dt$$

Maintenant, pour la majoration, on va la sommer de $k = 1$ à $n - 1$ (pour avoir les mêmes bornes que pour la minoration) et sortir le n -ème terme :

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t) dt + \ln(n) = \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

Donc,

$$\int_1^n \ln(t) dt + \ln(n) \geq \ln(n!) \geq \int_1^n \ln(t) dt.$$

Puisqu'une primitive du logarithme est $x \rightarrow x \ln(x) - x$, on en déduit que

$$n \ln(n) - n + 1 + \ln(n) \geq \ln(n!) \geq n \ln(n) - n + 1.$$

On divise par $n \ln(n)$:

$$1 - \frac{n - \ln(n) - 1}{n \ln(n)} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} \leq 1 - \frac{n - 1}{n \ln(n)}.$$

Or

$$\frac{-n + \ln(n) + 1}{n \ln(n)} = -\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On a de même que $\frac{-n+1}{n \ln(n)} \rightarrow 0$. Par encadrement,

$$\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où

$$\boxed{\ln(n!) \sim n \ln(n)}$$

7. `def facto(n):`

```

P=1
for k in range(1,n+1):
    P=P*k
return P
```

Correction exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x) dx.$$

1. (a) La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ est $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$.

(b) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k + I_{k+1} = \frac{1}{2k+1}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_k + I_{k+1} &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2k}(x) dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{2k+2}(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\tan^{2k}(x) + \tan^{2k+2}(x)) dx && \text{par linéarité} \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2k}(x)(1 + \tan^2(x)) dx && \text{On reconnaît } u'u^{2k} \\ &= \left[\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1} \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\tan 0 = 0$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$$

MÉTHODE 1

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (I_k + I_{k+1}) && \text{d'après ce qui précède} \\ &= \sum_{k=0}^n \left((-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} \right) \\ &= (-1)^0 I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1} && \text{par télescopage} \\ &= I_0 + (-1)^n I_{n+1} \end{aligned}$$

MÉTHODE 2 - PAR RÉCURRENCE

INITIALISATION : $n = 0$

D'une part

$$\sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^0}{2 \times 0 + 1} = 1$$

et d'autre part

$$I_0 + (-1)^0 I_1 = I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \times 0 + 1} = 1 \quad (\text{d'après la question précédente}).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^0 I_{0+1}.$$

HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1} \\
&= I_0 + (-1)^n I_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \quad \text{par H.R.} \\
&= I_0 + (-1)^n \left(I_{n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\
&= I_0 + (-1)^n (-I_{n+2}) \quad \text{d'après la question 1.b} \\
&= I_0 + (-1)^{n+1} I_{n+2}
\end{aligned}$$

CONCLUSION : D'après le principe de récurrence on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right]$, $(\tan(x))^{2n} > 0$. Par croissance de l'intégrale sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ ($0 \leq \frac{\pi}{4}$, donc les bornes sont dans le bon sens) on trouve que :

$$\int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{2n} dx > 0 \quad \text{i.e.} \quad I_n > 0.$$

On aurait aussi pu dire que la fonction était continue sur cet intervalle, et strictement positive en au moins un point.

- (b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(x) dx - \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\tan^{2n+2}(x) - \tan^{2n}(x)) dx \quad \text{par linéarité} \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x) (\tan^2(x) - 1) dx
\end{aligned}$$

On sait que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ donc la fonction $\tan$ est donc une fonction croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$.

On peut en déduire que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, $\tan(0) \leq \tan(x) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ i.e. $0 \leq \tan x \leq 1$.

On en déduit que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, $0 \leq \tan^2 x \leq 1$ et donc : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, $\tan^2(x) - 1 \leq 0$.

On savait déjà que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, $(\tan(x))^{2n} > 0$.

Ainsi : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, $\tan^{2n}(x) (\tan^2(x) - 1) \leq 0$.

Par croissance de l'intégrale sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ ($0 \leq \frac{\pi}{4}$) on trouve que :

$$\int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{2n} (\tan^2(x) - 1) dx \leq 0.$$

Cela prouve que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus on vient de voir qu'elle est minorée par 0.

On peut en déduire, d'après le théorème de la limite monotone qu'elle converge.

Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- (c) À l'aide de la question 1. déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$. En passant à la limite on trouve $2\ell = 0$ et donc que $\ell = 0$.

4. Déterminer alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ on trouve que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$-I_{n+1} \leq (-1)^n I_{n+1} \leq I_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$, on trouve par théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n I_{n+1} = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_0 + (-1)^n I_{n+1}) = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Correction exercice 3

1. (a) On peut avoir un changement de couleur dès le deuxième tirage et à chaque tirage qui suit.

On peut donc avoir un changement de couleur à chacun des $n - 1$ derniers tirages.

Appelons succès le fait d'avoir un changement de couleur.

Quelque soit la couleur précédente tirée, à chacun des $n - 1$ derniers tirages, 2 boules sur 3 seront de couleurs différentes de celle tirée précédemment. On aura donc une probabilité de $\frac{2}{3}$ d'avoir un succès.

Les tirages sont tous indépendants les uns des autres.

Ainsi :

$$X \sim \mathcal{B}\left(n-1, \frac{2}{3}\right).$$

- (b) Donner l'espérance et la variance de X . On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2(n-1)}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{2(n-1)}{9}.$$

2.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def X(n): # n est un entier désignant le nbr de tirages effectués
    t=rd.randint (1 ,4)
    C=0 # C désignera le nbr de changements de couleur
    couleur = rd.randint(1,4)
    for k in range(n-1):
        couleur2=rd.randint (1 ,4)
        if couleur!=couleur2:
            C=C+1
        couleur=couleur2
    return(C)
```

3. Écrire une fonction en Python nommée **Esp** prenant n et N deux entiers naturels en argument et retournant une approximation de $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de N réalisations de X .

```
def Esp(n,N):
    M=0
    for k in range(N):
        M=M+X(n)
    return(M/N)
```

Correction exercice 4

1. La fonction ch est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x).$$

Cela prouve que la fonction ch est paire.

2. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\text{ch}'(x) > 0 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0.$$

De plus $\text{ch}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1.$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty.$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Var. de ch	$+\infty$	1	$+\infty$

On a :

- La fonction ch est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de la bijection monotone permet de dire que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $\text{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

On note $\text{argch} : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ la bijection réciproque de la fonction ch .

3. (a) — ch est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$.

— $\forall x > 0, \text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$. La fonction ch' ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.

Donc argch est une fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$(\text{argch})'(x) = \frac{1}{\text{ch}' \circ \text{argch}(x)} \quad (\heartsuit)$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\text{ch}(x))^2 - (\text{ch}'(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) La relation précédente permet d'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\text{ch}'(x))^2 = (\text{ch}(x))^2 - 1.$$

Comme pour tout $x > 0, \text{ch}(x) > 1$ on trouve que : $\forall x > 0, (\text{ch}(x))^2 - 1 > 0$.

Et donc $\forall x > 0$,

$$\text{ch}'(x) = \sqrt{(\text{ch}(x))^2 - 1}.$$

La relation $(\heartsuit)$ donne :

$$\forall x > 1, \quad (\text{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{(\text{ch}(\text{argch}(x)))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Correction Exercice 5

1. Dans cette question, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on définit les deux applications :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, 2x + y, -x + z), \\ g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, -2x - 2y - 2z, x + y + z). \end{aligned}$$

(a) Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= ((x + x') + (y + y') + (z + z'), 2(x + x') + (y + y'), -(x + x') + (z + z')) \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda(x + y + z), \lambda(2x + y), \lambda(-x + z)) = \lambda f(x, y, z). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(g)$.

Calcul de $\text{Ker}(f)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

On résout :

$$-x + z = 0 \iff z = x, \quad 2x + y = 0 \iff y = -2x.$$

Alors la première équation devient $x + (-2x) + x = 0$, ce qui est vérifié. Ainsi,

$$\text{Ker}(f) = \{(x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -2, 1)).$$

Donc une base de $\text{Ker}(f)$ est $((1, -2, 1))$.

Calcul de $\text{Ker}(g)$. Soit $(x, y, z) \in \text{Ker}(g)$.

$$g(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2(x + y + z) = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(g) \iff x + y + z = 0.$$

Donc

$$\text{Ker}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Par exemple, tout triplet de la forme $(u, v, -u - v)$ convient, d'où

$$\text{Ker}(g) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).$$

Ces deux vecteurs sont échelonnées, donc libre. Donc une base de $\text{Ker}(g)$ est $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$.

(c) Image de f . Avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$f(e_1) = (1, 2, -1), \quad f(e_2) = (1, 1, 0), \quad f(e_3) = (1, 0, 1).$$

Donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, -1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)).$$

On vérifie que $(1, 0, 1)$ est combinaison linéaire des deux premiers :

$$(1, 0, 1) = (-1)(1, 2, -1) + 2(1, 1, 0).$$

Ainsi

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, -1), (1, 1, 0)),$$

et cette famille est libre car échelonnée par le bas. Donc, une base de $\text{Im}(f)$ est $((1, 2, -1), (1, 1, 0))$.

Image de g . On a, pour tout (x, y, z) , $g(x, y, z) = (s, -2s, s)$ avec $s = x + y + z$, donc

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}((1, -2, 1), (1, -2, 1), (1, -2, 1)) = \text{Vect}((1, -2, 1)).$$

Ainsi une base de $\text{Im}(g)$ est $((1, -2, 1))$.

- (d) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et posons $s = x + y + z$.

On a

$$g(x, y, z) = s(1, -2, 1).$$

Or

$$f(1, -2, 1) = (1 - 2 + 1, 2 \cdot 1 - 2, -1 + 1) = (0, 0, 0),$$

donc $(1, -2, 1) \in \text{Ker}(f)$ et par linéarité :

$$(f \circ g)(x, y, z) = f(s(1, -2, 1)) = s f(1, -2, 1) = (0, 0, 0).$$

Ainsi,

$$f \circ g = 0.$$

Calculons maintenant $g \circ f$. On a

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, -x + z).$$

La somme des trois composantes vaut

$$(x + y + z) + (2x + y) + (-x + z) = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z) = 2s.$$

Donc

$$(g \circ f)(x, y, z) = (2s, -4s, 2s) = 2(s, -2s, s) = 2g(x, y, z).$$

Ainsi,

$$g \circ f = 2g.$$

- (e) En déduire qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que $f \circ g - g \circ f = \alpha g$.

On a $f \circ g = 0$ et $g \circ f = 2g$, donc

$$f \circ g - g \circ f = 0 - 2g = -2g.$$

On peut donc prendre

$$\alpha = -2.$$

2. Dans cette question, on se place sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ où n est un entier supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} f_A : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \\ M &\longmapsto AM. \end{aligned}$$

- (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrons que f_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f_A(M + N) = A(M + N) = AM + AN = f_A(M) + f_A(N),$$

et

$$f_A(\lambda M) = A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda f_A(M).$$

Donc f_A est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est un endomorphisme.

- (b) Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i. Montrons que $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$(f_A \circ f_B)(M) = f_A(BM) = A(BM) = (AB)M = f_{AB}(M).$$

Donc $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

- ii. D'après la question précédente,

$$f_A \circ f_B = f_{AB} \quad \text{et} \quad f_B \circ f_A = f_{BA}.$$

Donc

$$f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = f_{AB} - f_{BA} = f_{AB-BA}.$$

Sens $\Rightarrow$. Supposons $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B$. Alors $f_{AB-BA} = \alpha f_B = f_{\alpha B}$. En particulier, en évaluant en $M = I_n$,

$$(AB - BA)I_n = (\alpha B)I_n,$$

d'où $AB - BA = \alpha B$.

Sens $\Leftarrow$. Supposons $AB - BA = \alpha B$. Alors, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$(f_A \circ f_B - f_B \circ f_A)(M) = (AB - BA)M = (\alpha B)M = \alpha(BM) = \alpha f_B(M).$$

Donc $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B$.

Ainsi,

$$f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B \iff AB - BA = \alpha B.$$

Partie B – Étude générale

- (a) Soit $x \in \text{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0$. On applique l'égalité $(*)$ à x :

$$(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = \alpha g(x).$$

Or $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ et $\alpha g(x) = \alpha \cdot 0 = 0$. Donc

$$-(g \circ f)(x) = 0 \iff g(f(x)) = 0.$$

Ainsi $f(x) \in \text{Ker}(g)$, ce qui prouve que $\text{Ker}(g)$ est stable par f .

- (b) Soit donc $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0$. En appliquant $(*)$ à x , on obtient :

$$f(g(x)) - g(f(x)) = \alpha g(x) \iff f(g(x)) - g(0) = \alpha g(x) \iff f(g(x)) = \alpha g(x).$$

Ainsi, $(f - \alpha \text{id}_E)(g(x)) = 0$. Donc, $g(x) \in \text{Ker}(f - \alpha \text{id}_E)$

- (c) Montrer que : $\forall x \in \text{Im}(g), f(x) \in \text{Im}(g)$.

Soit $x \in \text{Im}(g)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = g(y)$. En utilisant $(*)$, on a :

$$f(x) = f(g(y)) = g(f(y)) + \alpha g(y) = g(f(y) + \alpha y).$$

Donc $f(x) \in \text{Im}(g)$. Ainsi $\text{Im}(g)$ est stable par f .

2. On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Montrons que :

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Ker}(g - \mu \text{id}_E) = \{0_E\}.$$

Soit $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Ker}(g - \mu \text{id}_E)$. Alors

$$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad g(x) = \mu x.$$

On applique $(*)$ à x :

$$f(g(x)) - g(f(x)) = \alpha g(x).$$

Or

$$f(g(x)) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda x, \quad g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = \lambda \mu x.$$

Donc le membre de gauche vaut 0, et l'on obtient

$$0 = \alpha g(x) = \alpha \mu x.$$

Comme $\alpha \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on en déduit $x = 0_E$. Ainsi

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Ker}(g - \mu \text{id}_E) = \{0_E\}.$$

(L'inclusion réciproque est "évidente", car l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel, et il contient donc $\{0_E\}$.)

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ g^n - g^n \circ f = n\alpha g^n \quad (**)$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $g^0 = \text{id}_E$, donc

$$f \circ g^0 - g^0 \circ f = f - f = 0 = 0 \cdot \alpha g^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $(**)$ vraie au rang n :

$$f \circ g^n - g^n \circ f = n\alpha g^n.$$

On veut montrer qu'alors

$$f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f = (n+1)\alpha g^{n+1}.$$

On écrit :

$$f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f = f \circ g^n \circ g - g^n \circ g \circ f = (f \circ g^n \circ g - g^n \circ f \circ g) + (g^n \circ f \circ g - g^n \circ g \circ f).$$

On factorise g à droite dans le premier crochet et g^n à gauche dans le second :

$$= (f \circ g^n - g^n \circ f) \circ g + g^n \circ (f \circ g - g \circ f).$$

Par hypothèse de récurrence et par $(*)$, cela donne :

$$= (n\alpha g^n) \circ g + g^n \circ (\alpha g) = n\alpha g^{n+1} + \alpha g^{n+1} = (n+1)\alpha g^{n+1}.$$

L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence, $(**)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$. On note θ l'endomorphisme nul de E .

(a) On suppose que $f^2 = f$. Montrons que $f \circ g \circ f = \theta$.

Sous l'hypothèse $\alpha = 1$, la relation $(*)$ s'écrit :

$$f \circ g - g \circ f = g.$$

On compose à gauche par f :

$$f \circ (f \circ g - g \circ f) = f \circ g.$$

Donc

$$f^2 \circ g - f \circ g \circ f = f \circ g.$$

Comme $f^2 = f$, on obtient

$$f \circ g - f \circ g \circ f = f \circ g,$$

d'où

$$f \circ g \circ f = \theta.$$

(b) On suppose réciproquement que $f \circ g \circ f = \theta$.

i. Montrons que $f^2 \circ g = f \circ g$.

On part de $(*)$ avec $\alpha = 1$:

$$f \circ g - g \circ f = g.$$

On compose à gauche par f :

$$f \circ (f \circ g - g \circ f) = f \circ g,$$

soit

$$f^2 \circ g - f \circ g \circ f = f \circ g.$$

Or, par hypothèse, $f \circ g \circ f = \theta$, donc

$$f^2 \circ g = f \circ g.$$

ii. En déduire que, si l'endomorphisme g est surjectif, alors $f^2 = f$.

D'après (i),

$$f^2 \circ g = f \circ g \iff (f^2 - f) \circ g = \theta.$$

Si g est surjectif, alors $g(E) = E$. Soit $y \in E$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, et donc

$$(f^2 - f)(y) = (f^2 - f)(g(x)) = ((f^2 - f) \circ g)(x) = 0.$$

Ainsi $(f^2 - f)(y) = 0$ pour tout $y \in E$, donc $f^2 - f = \theta$, c'est-à-dire $f^2 = f$.