

EM Lyon 2025 - Math Appliquées, Exercice 1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

- (a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.
- Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$.

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
- Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x > 0$.
 - Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.
 - En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

- Soit $x \geq 1$.
 - Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

- En déduire que :

$$(*) \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x + 1) \leq \frac{e}{x}.$$

- Montrer que $f(x) = x + 1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$.
- Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

10. (a) À l'aide de l'encadrement (*) montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

puis

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. (a) Justifier que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0.$$

- (b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Wallis, niveau 2

Dans tout l'exercice, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

Partie I : étude des intégrales W_n

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .

On rappelle la formule trigonométrique : $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
 3. Justifier que la suite (W_n) est décroissante.
 4. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

5. (a) Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $W_n W_{n+1}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

7. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{puis la valeur de } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n.$$

7.5 Ecrire une fonction `Python` appelé `Wallis(n)` qui calcule W_n à l'aide des questions ci-dessus.

Partie II : un calcul de limite d'intégrale

Dans cette partie, on note $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

8. Justifier que F est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0.

Le but de cette partie est de calculer la limite de F en $+\infty$.

9. (a) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

- (b) Prouver que : $\forall x \geq 1, F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt$.
- (c) En déduire que : $\forall x \geq 1, F(x) \leq 1 + \int_0^1 e^{-t^2} dt$.
- (d) Conclure que F possède une limite finie notée ℓ en $+\infty$.
10. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = n \tan(t)$, montrer que

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n^2-2}(t) dt.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = n \sin(t)$, exprimer

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du$$

en fonction de W_{2n^2+1} .

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nW_{2n^2+1} \leq F(n) \leq nW_{2n^2-2}.$$

12. Conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{puis que } \ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Corrigé

HEC 2019 - Partie 1 et début de la 2

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$;
- L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$;
- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln(M_X(t)),$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X).

- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p de X* , noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée p -ième de K_X en 0 :

$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([S = -1]) = \mathbb{P}([S = +1]) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$.

- (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- (b) Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.
- (c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X .

On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k - n]) x^k, \\ G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k - n]) x^k. \end{cases}$$

- (i) Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t)$.
- (ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.
- (iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X .
2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.
- (a) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2 .
- (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2 .
- (c) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2 .
3. Le script **Python** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
import numpy as np
n = 10
X = np.random.binomial(n=2, p=0.5, size=(n,2))
B = np.random.binomial(n=1, p=0.5, size=(n,2))
S = 2*B - np.ones((n,2))
Z1 = np.array([S[i,0]*X[i,0], X[i,0]-S[i,0]-1 ] for i in range(n))
Z2 = np.array([S[i,0]*X[i,0], X[i,1]-S[i,1]-1 ] for i in range(n))
```

- (a) Que contiennent les variables **X** et **S** après l'exécution des quatre premières instructions ?
- (b) Expliquer pourquoi, après l'exécution de tout le script, chaque coefficient des tableaux **Z1** et **Z2** contient une simulation de la variable aléatoire Y_2 .
- (c) Dans le langage Python, si A et B sont deux vecteurs de même dimension, le vecteur C défini par $C = (A == B)$ est un tableau de booléen vérifiant $C[i] = \text{False}$ lorsque $A[i] \neq B[i]$, et valant True si $A[i] = B[i]$. De plus, $\text{np.count_nonzero}(C)$ compte le nombre de True dans le tableau C et renvoie un entier. Par exemple, si $A = \text{np.array}([0,2,4,6,8])$ et $B = \text{np.array}([1,2,3,6,8])$, alors $C = B == A$ est la matrice $[\text{False}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}]$ et $\text{np.count_nonzero}(C)$ affiche 3.

On suppose que l'on modifie le script précédent en prenant une valeur très grande de n (par exemple $n = 10000$) et en ajoutant les instructions suivantes :

```
p1 = np.count_nonzero(Z1[:,0] == Z1[:,1]) / n
p2 = np.count_nonzero(Z1[:,0] == Z2[:,1]) / n
```

Donner la valeur théorique approchée de p_1 et de p_2 . On n'attend pas ici une valeur exacte, mais une formule.

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.
- (a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n \right).$$

- (c) En utilisant l'égalité $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt}(1 + e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et D_X le domaine de définition de la fonction K_X (Ici, $D_X = \mathbb{R}$).

(a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à D_X , l'égalité :

$$K_Y(t) = bt + K_X(at).$$

(c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi. Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et D_X et D_Y les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y .

(a) Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à D_X et D_Y , on a :

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t).$$

(b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X , Y et $X + Y$.

La suite, les questions 7 à 11 du sujet original, sont pour l'instant infaisable. Rendez vous l'année prochaine ! Tournez la page pour la partie III du sujet qui, elle, est accessible.

Partie III — Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.

On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a

$$M_X^{(k)}(0) = E(X^k).$$

De plus, on pose :

$$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4).$$

7. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.

8. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose : $S = X_1 - X_2$.

(a) Établir l'égalité :

$$E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2.$$

(b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t).$$

(c) En déduire l'égalité :

$$E(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2.$$

9. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation :

$$Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2.$$

Corrigé

Corrigé EM Lyon 2025

Corrigé — Exercice 1 (EML 2025, Maths appliquées)

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

1. **1.a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Initialisation. $u_0 = 1 > 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $e^{1/u_n} > 0$, donc

$$u_{n+1} = u_n e^{1/u_n} > 0.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

- 1.b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n (e^{1/u_n} - 1).$$

Or $u_n > 0$ et $1/u_n > 0$, donc $e^{1/u_n} > 1$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

- 1.c.** La suite (u_n) est croissante, donc elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle soit majorée. Alors elle converge vers un réel ℓ .

Comme $u_0 = 1$ et (u_n) est croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$, donc $\ell \in [1, +\infty[$.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$ (la fonction $x \mapsto x e^{1/x}$ est continue sur $[1, +\infty[$), on obtient

$$\ell = \ell e^{1/\ell} \iff \ell(1 - e^{1/\ell}) = 0 \iff \ell = 0,$$

ce qui contredit $\ell \geq 1$. Donc (u_n) n'est pas majorée, et comme elle est croissante,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. Compléter le programme Python pour afficher le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$:

```
import numpy as np
u=1
n=0
while u<10**6:
    u=u*np.exp(1/u)
    n=n+1
print(n)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

3. **Limites en $+\infty$ et en 0^+ .**

En $+\infty$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$, et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x} = +\infty.$$

En 0^+ . Pour $x > 0$,

$$f(x) = x e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{1/x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

4. **Variations de f sur $]0, +\infty[$.**

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$,

$$f'(x) = e^{1/x} + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = e^{1/x} \frac{x-1}{x}.$$

Comme $e^{1/x} > 0$ et $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$:

$$f'(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 1, \quad f'(1) = 0, \quad f'(x) > 0 \text{ si } x > 1.$$

Ainsi, f est décroissante sur $]0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$.

5. **Série et somme.** Soit $x > 0$.

5.a. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ est une série exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/x)^k}{k!} = e^{1/x}.$$

5.b. On en déduit

$$f(x) = x e^{1/x} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = x \left(1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \right) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6. Soit $x \geq 1$.

6.a. On a

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} = \frac{1}{2!} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{1}{2}.$$

De plus, comme $x \geq 1$, on a $\frac{1}{x} \leq 1$, donc pour $k \geq 2$,

$$x^{2-k} = \left(\frac{1}{x} \right)^{k-2} \leq 1,$$

et ainsi

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

6.b. En divisant par $x > 0$,

$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}.$$

Or $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$, donc

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x + 1) \leq \frac{e}{x}.$$

7. Comme, lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{2x} \rightarrow 0$ et $\frac{e}{x} \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0,$$

soit

$$f(x) = x + 1 + o_{+\infty}(1).$$

Partie C : Comportement asymptotique de la suite (u_n)

9. **9.a.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_k e^{1/u_k}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}.$$

9.b. En sommant de $k = 0$ à $n - 1$ (pour $n \geq 1$),

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

La somme de gauche télescope :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

Comme $u_0 = 1$, on obtient

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

10. **10.a.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on applique l'encadrement de la question 6.b à $x = u_k$ (on a $u_k \geq 1$) et on obtient

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - (u_k + 1) \leq \frac{e}{u_k}.$$

Or $f(u_k) = u_{k+1}$, donc

$$\frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k},$$

c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

10.b. En sommant de $k = 0$ à $n - 1$ (pour $n \geq 1$),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{u_k}\right).$$

On a $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1$, donc

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

Avec $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$, on obtient

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. **11.a.** Comme $u_n \rightarrow +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par croissance comparée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0.$$

11.b. En divisant l'encadrement

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n)$$

par $u_n > 0$, on obtient

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

Les deux bornes tendent vers 0, donc $1 - \frac{n}{u_n} \rightarrow 0$, i.e.

$$\frac{n}{u_n} \rightarrow 1 \quad \implies \quad u_n \sim n.$$

12. Comme, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n),$$

et comme $\frac{u_n}{n} \rightarrow 1$, on a $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) \rightarrow 0$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \sim \ln(n).$$

Corrigé Wallis niveau 2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

Partie I — Étude des intégrales W_n

1. On a

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Puis

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Enfin

$$W_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, positive, et non nulle (car $\cos(0) = 1$). Donc

$$W_n > 0.$$

3. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$, donc

$$\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t).$$

Par croissance de l'intégrale,

$$W_{n+1} \leq W_n.$$

La suite (W_n) est donc décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Procédons à une intégration par parties dans

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt,$$

en posant

$$u : t \mapsto \sin(t) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \cos^{n+1}(t),$$

qui sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, avec

$$u'(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = -(n+1) \sin(t) \cos^n(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[\sin(t) \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\pi/2} - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$$

5. (a) On en déduit

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1},$$

donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est constante.

(b) Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on obtient

$$(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

6. Par décroissance,

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Et comme $W_{n+2} \leq W_{n+1}$ avec

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$

on obtient

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

7. Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.$$

Ainsi

$$nW_n^2 \sim nW_n W_{n+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Donc, par continuité de la fonction racine carrée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

—

Partie II — Limite de l'intégrale

On note

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

8. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est la primitive qui s'annule en 0.
9. (a) D'après la question précédente, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- (b) Soit $x \geq 1$. D'après la relation de Chasles,

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

Or, pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$, de sorte que $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x e^{-t} dt.$$

Et donc $F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt$.

- (c) Soit $x \geq 1$. On remarque que

$$\int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1} \leq e^{-1} \leq 1.$$

Conclusion : pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq 1 + \int_0^1 e^{-t^2} dt$.

- (d) Le nombre $1 + \int_0^1 e^{-t^2} dt$ est une constante, indépendante de x , et donc nous avons prouvé dans la question précédente que F est majorée sur $[1, +\infty[$.
Donc F est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$.
10. (a) C'est une inégalité classique, que l'on montre par exemple à l'aide d'une étude de fonction.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, n]$. Alors

$$e^{-u^2} = \left(e^{-\frac{u^2}{n^2}}\right)^{n^2}.$$

Mais pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq 1 + t$, si bien que $0 \leq 1 - \frac{u^2}{n^2} \leq e^{-\frac{u^2}{n^2}}$.

Donc par croissance de $t \mapsto t^{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leq e^{-u^2}.$$

De même, on a

$$e^{u^2} = \left(e^{\frac{u^2}{n^2}}\right)^{n^2} \geq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Et donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$,

$$e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$

11. (a) Utilisons le changement de variable indiqué, en posant $u = n \tan(t)$, de sorte que pour $t = 0$, $u = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{4}$, $u = n$. On a alors $du = n(1 + \tan^2(t)) dt$. Notons que $t \rightarrow n \tan(t)$ est strictement croissante sur $[0, \pi/4]$, donc le changement de variable est valide. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du &= \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t))^{-n^2} n(1 + \tan^2(t)) dt \\ &= n \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t))^{1-n^2} dt = n \int_0^{\pi/4} (\cos^2(t))^{n^2-1} dt = n \int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2}(t) dt. \end{aligned}$$

- (b) Comme le suggère l'énoncé, on utilise le changement de variable $u = n \sin(t)$. Lorsque $t = 0$, $u = 0$ et lorsque $t = \frac{\pi}{2}$, $u = n$. On a donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{n^2} n \cos(t) dt = n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n^2+1}(t) dt = nW_{2n^2+1}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité de la question 10.b devient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du \leq \underbrace{\int_0^n e^{-u^2} du}_{=F(n)} \leq \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du$$

Mais par la question 11.a) :

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2}(t) dt = n \left(W_{2n^2-2} - \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n^2-2}(t) dt}_{\geq 0} \right) \leq nW_{2n^2-2}.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{2n^2+1} \leq F(n) \leq nW_{2n^2-2}$.

12. Par la question 7., on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Donc :

$$nW_{2n^2+1} \sim n \sqrt{\frac{\pi}{2 \times (2n^2+1)}} \sim n \sqrt{\frac{\pi}{4n^2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$nW_{2n^2-2} \sim n \sqrt{\frac{\pi}{2 \times (2n^2-1)}} \sim n \sqrt{\frac{\pi}{4n^2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc, les deux termes convergent vers $\sqrt{\pi}/2$. D'après le théorème des gendarmes, $F(n) \rightarrow \sqrt{\pi}/2$. Puisque F admet une limite ℓ en l'infini, on en déduit que

$\ell = \sqrt{\pi}/2$.

Corrigé HEC 2019

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$.

a) Par le théorème de transfert :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = \sum_{k=-n}^n e^{tk} \mathbb{P}(X = k)$$

La fonction M_X apparaît alors comme une combinaison linéaire de fonctions $f_k : t \mapsto e^{tk}$, toutes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: M_X est elle-même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout k de $\llbracket -n, n \rrbracket$, et pour tout t de $\mathbb{R}$: $f'_k(t) = k \cdot e^{kt}$ et par une récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_k^{(p)}(t) = k^p \cdot e^{tk}.$$

Par linéarité de la dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées), on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^n k^p \cdot e^{tk} \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

Donc : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^n k^p \cdot e^0 \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=-n}^n k^p \cdot \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X^p)$, à nouveau grâce au théorème de transfert.

- b) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X . On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X = k - n) x^k \\ G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(Y = k - n) x^k \end{cases}$$

- (i) Pour tout réel t :

$$G_X(e^t) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(X = k - n) e^{tk} \stackrel{[j=k-n]}{=} \sum_{j=-n}^n \mathbb{P}(X = j) \cdot e^{t(j+n)} = e^{tn} \cdot \sum_{j=-n}^n \mathbb{P}(X = j) e^{tj} = e^{tn} \cdot M_X(t)$$

- (ii) On sait par hypothèse que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y(t) = M_X(t) \quad \text{donc} \quad e^{nt} \cdot M_Y(t) = e^{nt} \cdot M_X(t) \iff G_Y(e^t) = G_X(e^t).$$

- (iii) Les fonctions G_X et G_Y sont des polynômes, et on vient de voir que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(e^t) - G_Y(e^t) = 0,$$

ce qui signifie que le polynôme $G_X - G_Y$ admet pour racines tous les nombres e^t , pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

Comme la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$, cela signifie que tout réel strictement positif est racine de $G_X - G_Y$; ce polynôme est donc forcément nul puisqu'il possède une infinité de racines !

Les deux polynômes G_X et G_Y sont donc égaux : ils ont en particulier même degré et mêmes coefficients, de sorte que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k - n) = \mathbb{P}(Y = k - n) \iff \forall j \in \llbracket -n, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(Y = j)$$

et toute probabilité du type $\mathbb{P}(X = j)$ ou $\mathbb{P}(Y = j)$ avec $j \notin \llbracket -n, n \rrbracket$, est nulle.

On en conclut donc que X et Y suivent la même loi.

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. On suppose que les variables aléatoires S et X_2 sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.

- a) (i) Les univers-images de X_2 et S sont respectivement $\{0, 1, 2\}$ et $\{-1, 1\}$, donc le produit $Y_2 = SX_2$ a pour valeurs possibles :

$$Y_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

(ii) Calcul des probabilités de la loi de Y_2 :

★ $[Y_2 = -2] = [S = -1] \cap [X_2 = 2]$ donc par indépendance de S et X_2 :

$$\mathbb{P}([Y_2 = -2]) = \mathbb{P}([S = -1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{1}{2} \times \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\star \mathbb{P}([Y_2 = -1]) = \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\star \mathbb{P}([Y_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ (pas de contrainte sur } S).$$

$$\star \mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \mathbb{P}([S = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4}$$

$$\star \mathbb{P}([Y_2 = 2]) = \mathbb{P}([S = 1] \cap [X_2 = 2]) = \frac{1}{8}.$$

b) $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $(S + 1)(\Omega) = \{0, 2\}$ donc $(X_2 - (S + 1))(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et :

$$\star \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = -2]) = \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [S = -1]) = \mathbb{P}([X_2 = 0]) \times \mathbb{P}([S = -1]) = \frac{1}{8}.$$

$$\star \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = -1]) = \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [S = -1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\star \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = 0]) = \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [S = -1] \cup ([X_2 = 2] \cap [S = 1])) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\star \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = 1]) = \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [S = -1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\star \mathbb{P}([X_2 - (S + 1) = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [S = -1]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Les variables aléatoires Y_2 et $X_2 - (S + 1)$ suivent bien la même loi.

3. Question Python :

```
(1) n = 10
(2) X = np.random.binomial(2, 0.5, size=(n,2))
(3) B = np.random.binomial(1, 0.5, size=(n,2))
(4) S = 2*B - np.ones((n,2))
(5) Z1 = np.column_stack((S[:,0]*X[:,0], X[:,0] - S[:,0] - np.ones(n)))
(6) Z2 = np.column_stack((S[:,0]*X[:,0], X[:,1] - S[:,1] - np.ones(n)))
```

a) Après exécution des quatre premières instructions :

- X contient $2n$ simulations indépendantes de la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ organisées sur n lignes et 2 colonnes.
- S contient $2n$ simulations indépendantes de la loi de S définie en préambule de cette parties, organisées de la même façon.

Donc en effet, le vecteur B contient $2n$ simulations indépendantes de la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et il est clair que si $B \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, alors $2B - 1$ suit la même loi que S .

b) Les instructions des lignes 5 et 6 du script Python juxtaposent deux colonnes à n lignes calculées via des opérations termes à termes :

- La première colonne de $Z1$ contient les produits terme à terme des simulations de la première colonne de X et de la première colonne de S : on obtient ainsi une colonne de n simulations de $SX_2 = Y_2$.
- La deuxième colonne de $Z2$ contient des valeurs du type :

$$X(i, 1) - S(i, 1) - 1 = X(i, 1) - (S(i, 1) + 1),$$

c'est-à-dire n simulations en colonne de $X_2 - (S + 1)$, dont on vient de voir qu'elle suit la même loi que Y_2 .

Ces deux colonnes sont concaténées pour faire de Z_1 une matrice de $2n$ simulations de la loi de la v.a.r. Y_2 .

- La matrice $Z2$ est construite sur le même modèle : sa première colonne est d'ailleurs identique à celle de $Z1$, la deuxième étant construite en utilisant cette fois la deuxième colonne de simulations de chacun des deux vecteurs X et S .

c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à n une valeur beaucoup plus grand que 10 (par exemple, 10000) et en lui adjoignant les deux instructions (7) et (8) suivantes :

```
(7) p1 = np.count_nonzero(Z1[:,0] == Z1[:,1]) / n
(8) p2 = np.count_nonzero(Z2[:,0] == Z2[:,1]) / n
```

Avec le sens des commandes `count_nonzero` et le test d'égalité rappelé par l'énoncé, on comprend donc que $p1$ correspond à la fréquence du nombre de coïncidences ligne par ligne, entre les deux

colonnes de $Z1$: on cherche le nombre de fois où $Z1(i,1)$ est égal à $Z1(i,2)$ et on divise par le nombre total de simulations.

On obtient donc la fréquence de réalisation de l'événement : $[SX_2 = X_2 - (S + 1)]$, qui sert à comparer concrètement ces deux façons possibles de simuler la même loi, celle de Y_2 .

La loi faible des grands nombres assure alors que $p1$ est, pour n très grand, une valeur approchée de la probabilité $\mathbb{P}([SX_2 = X_2 - (S + 1)])$.

Le nombre $p2$ est construit sur le même principe, à ceci près cependant que les deux échantillons utilisés pour simuler SX_2 et $X_2 - (S + 1)$ ne sont pas les mêmes, et sont indépendants l'un de l'autre.

Le nombre $p2$ serait donc plutôt une valeur approchée de $\mathbb{P}([SX_2 = \tilde{X}_2 - (\tilde{S} + 1)])$, où $\tilde{X}_2$ et $\tilde{S}$ sont des variables aléatoires respectivement de même loi que X_2 et S , indépendantes entre elles et de X_2 et S .

L'exécution du script (impossible à faire pendant l'épreuve!) donne d'ailleurs deux valeurs différentes pour $p1$ et $p2$:

```
-->disp(p1)
```

```
0.12432
```

```
-->disp(p2)
```

```
0.2186
```

Cela paraît assez raisonnable a posteriori (mais m'a quand même posé question la première fois que j'ai exécuté le script!) : comme on l'a vu à la question 2.a) (ii), si SX_2 et $X_2 - (S + 1)$ sont de même loi, ce ne sont pas les mêmes valeurs de S et X_2 par exemple, qui donnent $[SX_2 = 1]$ et $[X_2 - (S + 1) = 1]$. Ce problème de couplage de valeurs disparaît dans le deuxième cas puisque les deux jeux de valeurs comparés sont totalement indépendants.

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.

- a) La variable aléatoire X_n est donc finie, d'univers-image $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et $x \mapsto e^{tx}$ est définie pour tout réel x , donc d'après le théorème de transfert, $M_{X_n}(t) = \mathbb{E}(e^{tX_n})$ est bien définie pour tout réel t par :

$$M_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \cdot \mathbb{P}([X_n = k]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{tk} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^t)^k = \frac{(e^t + 1)^n}{2^n}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

- b) La loi de $Y_n = SX_n$ est, de son côté, définie par : $(SX_n)(\Omega) = \llbracket -n, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([Y_n = -k]) = \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_n = k]) = \mathbb{P}([S = -1]) \times \mathbb{P}([X_n = k]) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

et de même : $\mathbb{P}([Y_n = k]) = \mathbb{P}([S = 1] \cap [X_n = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Enfin, $\mathbb{P}([Y_n = 0]) = \mathbb{P}([X_n = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ainsi, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \sum_{k=-n}^n e^{tk} \cdot \mathbb{P}([Y_n = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-tk} \mathbb{P}([X_n = k]) + e^0 \mathbb{P}([X_n = 0]) + \sum_{k=1}^n e^{tk} \mathbb{P}([X_n = k]) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (e^{-t})^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (e^t)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} ((1 + e^{-t})^n - 1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} ((1 + e^t)^n - 1) \end{aligned}$$

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot ((1 + e^{-t})^n + (1 + e^t)^n)$$

□

- c) Pour tout réel t , on a en effet : $(1 + e^{-t})^n = (e^{-t}(e^t + 1))^n = e^{-nt}(1 + e^t)^n$, donc le résultat précédent s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (1 + e^{-nt}) \cdot (1 + e^t)^n = \frac{1 + e^{-nt}}{2} \times \frac{(1 + e^t)^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-nt}}{2} \right) \times M_{X_n}(t)$$

Or $\frac{1}{2} + \frac{e^{-nt}}{2}$ peut s'écrire sous la forme : $e^{0 \cdot t} \cdot \frac{1}{2} + e^{-nt} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{E}(e^{-tH_n})$ si H_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, n\}$, de loi : $\mathbb{P}([H_n = 0]) = \mathbb{P}([H_n = n]) = \frac{1}{2}$.

On peut d'ailleurs considérer H_n indépendante de X_n , de sorte que le calcul précédent s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{-tH_n}) \times \mathbb{E}(e^{tX_n}) = \mathbb{E}(e^{tX_n} \times e^{-tH_n}) = \mathbb{E}(e^{t(X_n - H_n)}) = M_{X_n - H_n}(t)$$

Or les variables aléatoires Y_n et $X_n - H_n$ sont toutes deux à valeurs dans $[-n, n]$: le résultat de la question 1.c) et l'égalité des fonctions génératrices des moments M_{Y_n} et $M_{X_n - H_n}$ assurent que Y_n et $X_n - H_n$ suivent la même loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples.

5. Soit X une variable aléatoire et D_X le domaine de définition de la fonction K_X .

- a) $K_X(0) = \ln(M_X(0)) = \ln(\mathbb{E}(e^0)) = \ln(\mathbb{E}(1)) = \ln(1) = 0$.
b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Pour tout réel t pour lequel at appartient à D_X :

$$\begin{aligned} K_Y(t) &= \ln(M_Y(t)) = \ln(\mathbb{E}(e^{t(aX+b)})) = \ln(\mathbb{E}(e^{atX+bt})) \\ &= \ln(\mathbb{E}(e^{atX} \times e^{bt})) = \ln(e^{bt} \cdot \mathbb{E}(e^{atX})) \\ K_Y(t) &= bt + \ln(M_X(at)) = bt + K_X(at) \end{aligned}$$

□

- c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi. Par conséquent : $\forall t \in \mathbb{R}, K_{-X}(t) = K_X(t)$. Mais par ailleurs, $-X = aX + b$ avec $a = -1$ et $b = 0$, et la relation précédente permet d'écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, K_{-X}(t) = 0 + K_X(-t) = K_X(-t)$.

On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad K_X(t) = K_X(-t)$$

Par dérivations successives de cette égalité, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (-1)^p \cdot K_X^{(p)}(-t) = K_X^{(p)}(t) \text{ donc } \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^p \cdot K_X^{(p)}(0) = K_X^{(p)}(0) \iff (-1)^p \cdot Q_p(X) = Q_p(X)$$

En particulier, pour tout entier p impair, $(-1)^p = -1$ et on obtient :

$$-Q_p(X) = Q_p(X) \iff 2Q_p(X) = 0 \iff Q_p(X) = 0$$

C'est-à-dire que les cumulants de X d'ordres impairs sont tous nuls.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et D_X et D_Y les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y .

- a) Pour tout réel t appartenant à la fois à D_X et D_Y :

$$K_{X+Y}(t) = \ln(M_{X+Y}(t)) = \ln(\mathbb{E}(e^{t(X+Y)})) = \ln(\mathbb{E}(e^{tX+tY})) = \ln(\mathbb{E}(e^{tX}) \times \mathbb{E}(e^{tY}))$$

Comme X et Y sont indépendantes, alors d'après le lemme des coalitions, e^{tX} et e^{tY} le sont aussi, et par conséquent :

$$K_{X+Y}(t) = \ln(\mathbb{E}(e^{tX}) \times \mathbb{E}(e^{tY})) = \ln(\mathbb{E}(e^{tX})) + \ln(\mathbb{E}(e^{tY})) = K_X(t) + K_Y(t)$$

- b) Par linéarité de la dérivation : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout réel t appartenant à la fois à D_X et D_Y :

$$K_{X+Y}^{(p)}(t) = K_X^{(p)}(t) + K_Y^{(p)}(t)$$

C'est en particulier vrai en $t = 0$, ce qui donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad Q_p(X + Y) = Q_p(X) + Q_p(Y)$$

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe C^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine. On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$. De plus, on pose : $\mu_4(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)$.

7. Par définition : $Q_1(X) = K'_X(0)$, où pour tout $t \in I$, $K_X(t) = \ln(M_X(t))$, donc $K'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)}$, et en $t = 0$:

$$K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{\mathbb{E}(X)}{1} \quad \text{soit : } Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$$

d'après l'hypothèse faite, et puisque $M_X(0) = \mathbb{E}(e^0) = 1$.

Si on dérive une fois de plus : pour tout $t \in I$, $K''_X(t) = \frac{M''_X(t) \times M_X(t) - (M'_X(t))^2}{(M_X(t))^2}$, donc :

$$Q_2(X) = K''_X(0) = \frac{M''_X(0) \cdot 1 - (M'_X(0))^2}{1} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = V(X)$$

d'après la formule de Koenig-Huygens.

8. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose : $S = X_1 - X_2$.

a) D'après la formule du binôme de Newton :

$$S^4 = (X_1 - X_2)^4 = X_1^4 - 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + X_2^4$$

Les variables X_1 et X_2 admettent, comme X , des moments jusqu'à l'ordre 4 au moins, et sont indépendantes; d'après le lemme des coalitions, pour tout $(k, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$, X_1^k et X_2^j sont indépendantes; on en déduit que S admet un moment d'ordre 4 qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S^4) &= \mathbb{E}(X_1^4) - 4\mathbb{E}(X_1^3) \times \mathbb{E}(X_2) + 6\mathbb{E}(X_1^2) \times \mathbb{E}(X_2^2) - 4\mathbb{E}(X_1) \times \mathbb{E}(X_2^3) + \mathbb{E}(X_2^4) \\ &= \mathbb{E}(X^4) - 4\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 6\mathbb{E}(X^2)^2 - 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^3) + \mathbb{E}(X^4) \\ &= 2\mathbb{E}(X^4) - 8\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 6\mathbb{E}(X^2)^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, et par linéarité de l'espérance notamment :

$$\begin{aligned} 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2 &= 2\mathbb{E}(X^4 - 4X^3\mathbb{E}(X) + 6X^2\mathbb{E}(X)^2 - 4X\mathbb{E}(X)^3 + \mathbb{E}(X)^4) + 6(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2)^2 \\ &= 2\mathbb{E}(X^4) - 8\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 12\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)^2 - 8\mathbb{E}(X)^4 + 2\mathbb{E}(X)^4 \\ &\quad + 6\mathbb{E}(X^2)^2 - 12\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)^2 + 6\mathbb{E}(X)^4 \\ &= 2\mathbb{E}(X^4) - 8\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 6\mathbb{E}(X^2)^2 \end{aligned}$$

On obtient bien l'égalité des deux membres : $\mathbb{E}(S^4) = 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2$.

- b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes, il en est de même pour X_1 et $-X_2$. En reprenant les calculs réalisés 6.a), on réalise qu'on peut écrire :

$$\forall t \in I, \quad M_S(t) = \mathbb{E}(e^{t(X_1 - X_2)}) = \mathbb{E}(e^{tX_1} \times e^{-tX_2}) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) \times \mathbb{E}(e^{-tX_2}) = M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(-t) = M_X(t) \cdot M_X(-t)$$

Comme M_X est de classe C^4 sur I , par composition par $t \mapsto -t$ et produit, M_S est de classe C^4 au voisinage de 0; pour garantir que c'est le cas sur tout I , on a en fait besoin de savoir que I est un intervalle symétrique par rapport à 0 : $\forall t \in I, -t \in I$. On peut admettre que c'est le cas ici sans perte de généralité.

En reprenant le calcul réalisé à la question 12., on obtient une première relation entre M_S , K_S et K'_S :

$$\forall t \in I, \quad K_S(t) = \frac{M'_S(t)}{M_S(t)} \iff M'_S(t) = K'_S(t) \times M_S(t)$$

On dérive la dernière égalité (dérivée d'un produit) :

$$\forall t \in I, \quad M''_S(t) = K''_S(t) \times M_S(t) + K'_S(t) \times M'_S(t)$$

Encore une fois :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad M_S^{(3)}(t) &= K_S^{(3)}(t).M_S(t) + K_S''(t).M_S'(t) + K_S''(t).M_S'(t) + K_S'(t).M_S''(t) \\ &= K_S^{(3)}(t).M_S(t) + 2K_S''(t).M_S'(t) + K_S'(t).M_S''(t)\end{aligned}$$

Et une dernière fois :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad M_S^{(4)}(t) &= K_S^{(4)}(t).M_S(t) + K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + 2(K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + K_S''(t).M_S''(t)) \\ &\quad + K_S''(t).M_S''(t) + K_S'(t).M_S^{(3)}(t)\end{aligned}$$

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t).M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + 3K_S''(t).M_S''(t) + K_S'(t).M_S^{(3)}(t)$$

Remarque : la formule de Leibniz pour la dérivée n -ième d'un produit de deux fonctions n fois aurait permis de conclure plus rapidement, puisqu'on aurait pu dériver 3 fois $M_S' = K_S' \times M_S$ pour écrire, pour tout t de I

$$\begin{aligned}M_S^{(4)}(t) &= (M_S')^{(3)}(t) = (K_S' \times M_S)^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (K_S')^{(k)}(t). (M_S)^{(3-k)}(t) \\ &= \binom{3}{0}.K_S'(t).M_S^{(3)}(t) + \binom{3}{1}.(K_S')'(t).M_S''(t) + \binom{3}{2}.(K_S')''(t).M_S'(t) + \binom{3}{3}.(K_S')^{(3)}(t).M_S^{(0)}(t) \\ &= K_S'(t).M_S^{(3)}(t) + 3K_S''(t).M_S''(t) + 3K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + K_S^{(4)}(t).M_S(t)\end{aligned}$$

- c) La variable S présentant les conditions requises pour la propriété admise au début de cette partie, on peut dire que : $\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, M_S^{(k)}(0) = \mathbb{E}(S^k)$; l'évaluation de la relation précédente en $t = 0$, donne donc :

$$M_S^{(4)}(0) = K_S^{(4)}(0).M_S(0) + 3K_S^{(3)}(0).M_S'(0) + 3K_S''(0).M_S''(0) + K_S'(0).M_S^{(3)}(0)$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{E}(S^4) = Q_4(S).1 + 3Q_3(S).\mathbb{E}(S) + 3Q_2(S).\mathbb{E}(S^2) + Q_1(S).\mathbb{E}(S^3)$$

Où : $Q_1(S) = \mathbb{E}(S)$ d'après 12., et par ailleurs :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0 \dots !$$

On a aussi $Q_2(S) = V(S) = \mathbb{E}(S^2)$ puisque $\mathbb{E}(S) = 0$.

Il reste donc, en effet :

$$\mathbb{E}(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2$$

9. Il reste à se souvenir du fait que : $Q_4(S) = Q_4(X_1 - X_2) = Q_4(X_1) + Q_4(-X_2) = 2Q_4(X)$ au vu des calculs menés à la question 6.

Par ailleurs : $V(S) = V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2V(X)$ puisque X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi que X .

Il reste donc à mettre en relation les deux expressions possibles de $\mathbb{E}(S^4)$ qu'on a obtenues aux questions 13.a) et 13.c), qui permettent d'écrire :

$$2\mu_4(X) + 6(V(X))^2 = 2Q_4(X) + 12(V(X))^2 \Longleftrightarrow 2Q_4(X) = 2\mu_4(X) - 6(V(X))^2$$

ce qui donne bien :

$$Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2.$$