
Sujet niveau 1

La rédaction est très valorisée. Prenez soin de justifier tous vos arguments, et d'encadrer vos résultats.

Ce sujet a 75 points au total, réparti sur 5 exercices.

Exercice 1

(22 points) sept questions indépendantes

1. Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y + z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

2. Soit

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P \longmapsto XP' - P.$$

(a) Montrer que f est bien définie, c'est-à-dire que f est à bien valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Considérons l'application :

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x - y).$$

(a) Écrire une fonction Python nommée `g` prenant deux réels x et y en arguments et retournant la valeur de $g(x, y)$.

(b) Montrer que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que g est une application bijective.

4. Considérons l'application :

$$\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t) dt \right).$$

(a) Justifier que φ est bien à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Justifier que φ est une application linéaire.

(c) Justifier que φ n'est pas surjective.

5. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x t \arctan(t) dt = \frac{1}{2}((x^2 + 1) \arctan(x) - x).$$

On notera que cela nous fournit une primitive de $x \mapsto x \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) À l'aide du changement de variable $t = x^2$ et de la question précédente, montrer que :

$$\int_0^3 \arctan(\sqrt{t}) dt = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

6. Montrer par le calcul que :

$$\ln(n!) \sim n \ln(n).$$

AIDE : Pensez à la comparaison série-intégrale ! Cette question est très valorisée dans le barème.

7. Écrire une fonction Python appelée `facto(n)` qui calcule $n!$.

Exercice 2

(12 points)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x) dx$.

1. (a) Rappeler la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

(b) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k + I_{k+1} = \frac{1}{2k+1}$.

AIDE : Écrivez au brouillon ce que vaut la dérivée de u^n .

2. Montrer alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

3. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

(b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge.

(c) À l'aide de la question 1.b déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Déterminer alors, à l'aide de la question 2,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Exercice 3

(6 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 3 boules : une blanche, une rouge et une verte. On effectue n tirages successifs avec remise.

Si $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on dit qu'il y a changement de couleur au i ème tirage si la i ème boule tirée est d'une couleur différente de la $(i-1)$ ème boule.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de changement de couleur intervenants au cours des n tirages.

- (a) Montrer soigneusement que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
(b) Donner l'espérance et la variance de X . Ici, l'examineur n'attend pas la preuve, juste le résultat du cours.
- Recopier la fonction `X` donnée ci-dessous et compléter ses lignes 6, 9 et 11 pour que celle-ci retourne une simulation de la variable aléatoire X .

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 def X(n): # n est un entier désignant le nbr de tirages effectués
4     couleur=rd.randint (1 ,4)
5     C=0 # C désignera le nbr de changements de couleur
6     for k in range( ):
7         couleur_2=rd.randint (1 ,4)
8         if couleur != couleur_2:
9             ....
10        couleur= couleur_2
11    return ...
```

- Écrire une fonction en Python nommée `Esp` prenant n et N deux entiers naturels en argument et retournant une approximation de $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de N réalisations de X .

Exercice 4

(10 points)

On définit l'application cosinus hyperbolique, noté ch , par :

$$\text{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Étudier la parité de la fonction ch .
- Montrer que ch est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$.
On note $\text{argch} : [1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ la bijection réciproque de la fonction ch .
- (a) Montrer que argch est dérivable sur $]1; +\infty[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\text{ch}(x))^2 - (\text{ch}'(x))^2 = 1$.
(c) En déduire que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 5

(25 points)

PARTIE A

Les deux questions de cette partie A sont indépendantes.

- Dans cette question, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on définit les deux applications :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, 2x + y, -x + z)$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, -2x - 2y - 2z, x + y + z).$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On admettra que g en est de même un.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(g)$.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$, et une base de $\text{Im}(g)$.

Rappel Si $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple la base canonique) alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

- (d) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
 (e) En déduire qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que $f \circ g - g \circ f = \alpha g$.
2. Dans cette question, on se place sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ où n est un entier supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit l'application :

$$f_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto AM.$$

- (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que f_A est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
 (b) Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 i. Montrer que $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = f_{AB-BA}$.
 ii. En déduire très soigneusement que :

$$f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B \iff AB - BA = \alpha B.$$

AIDE Pour l'implication de gauche à droite, avec quel M évaluer $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A$ pour tomber sur $AB - BA$?

PARTIE B - ÉTUDE GÉNÉRALE

Dans cette partie, on revient à une étude générale. On se donne E un espace vectoriel et un réel α . On notera id_E l'endomorphisme identité sur E .
 On se donne également f et g deux endomorphismes de E qui vérifient :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha g \quad (\star)$$

1. (a) Montrer que $\text{Ker}(g)$ est stable par f c'est-à-dire que : $\forall x \in \text{Ker}(g), f(x) \in \text{Ker}(g)$.
 (b) Montrer que : $\forall x \in \text{Ker}(f), g(x) \in \text{Ker}(f - \alpha \text{id}_E)$.
 (c) Montrer que : $\forall x \in \text{Im}(g), f(x) \in \text{Im}(g)$.
2. On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$. Montrer que, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \cap \text{Ker}(g - \mu \text{id}_E) = \{0_E\}.$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ g^n - g^n \circ f = n\alpha g^n \quad (\star\star).$$

4. Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$. On note θ l'endomorphisme nul de E .
 (a) On suppose que $f^2 = f$. Montrer que $f \circ g \circ f = \theta$.
 (b) On suppose réciproquement que $f \circ g \circ f = \theta$.
 i. Montrer que $f^2 \circ g = f \circ g$.
 ii. En déduire que, si l'endomorphisme g est surjectif, alors $f^2 = f$.