
Sujet niveau 2

La rédaction est très valorisée. Prenez soin de justifier tous vos arguments, et d'encadrer vos résultats.

EM Lyon 2025 - Math Appliquées, Exercice 1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

- (a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.
- Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$.

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
- Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x > 0$.
 - Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.
 - En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

- Soit $x \geq 1$.
 - Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

- En déduire que :

$$(*) \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x + 1) \leq \frac{e}{x}.$$

- Montrer que $f(x) = x + 1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$.
- Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

10. (a) À l'aide de l'encadrement (*) montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

puis

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. (a) Justifier que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0.$$

- (b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Wallis, niveau 2

Dans tout l'exercice, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

Partie I : étude des intégrales W_n

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .

On rappelle la formule trigonométrique : $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
 3. Justifier que la suite (W_n) est décroissante.
 4. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

5. (a) Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $W_n W_{n+1}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

7. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{puis la valeur de } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n.$$

7.5 Ecrire une fonction `Python` appelé `Wallis(n)` qui calcule W_n à l'aide des questions ci-dessus.

Partie II : un calcul de limite d'intégrale

Dans cette partie, on note $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

8. Justifier que F est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0.

Le but de cette partie est de calculer la limite de F en $+\infty$.

9. (a) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

(b) Prouver que : $\forall x \geq 1, F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt$.

- (c) En déduire que : $\forall x \geq 1, F(x) \leq 1 + \int_0^1 e^{-t^2} dt$.
- (d) Conclure que F possède une limite finie notée ℓ en $+\infty$.
10. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq 1 + t$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = n \tan(t)$, montrer que

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n^2-2}(t) dt.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = n \sin(t)$, exprimer

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du$$

en fonction de W_{2n^2+1} .

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nW_{2n^2+1} \leq F(n) \leq nW_{2n^2-2}.$$

12. Conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{puis que } \ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

HEC-ESSEC ECE 2019 – Problème

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$;
- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln(M_X(t)),$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées *la fonction génératrice des moments* et *la fonction génératrice des cumulants* de X).

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([S = -1]) = \mathbb{P}([S = +1]) = \frac{1}{2}.$$

- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$.
 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
 - Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.

- (c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket -n, n \rrbracket$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X .

On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k - n]) x^k, \\ G_Y(x) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k - n]) x^k. \end{cases}$$

- (i) Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t)$.
 - (ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.
 - (iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X .
2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.
- (a) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2 .
 - (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2 .
 - (c) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2 .
3. Le script **Python** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
import numpy as np
n = 10
X = np.random.binomial(n=2, p=0.5, size=(n,2))
B = np.random.binomial(n=1, p=0.5, size=(n,2))
S = 2*B - np.ones((n,2))
Z1 = np.array([[S[i,0]*X[i,0], X[i,0]-S([i,0])-1 ] for i in range(n)] )
Z2 = np.array([[S[i,0]*X[i,0], X[i,1]-S([i,1])-1 ] for i in range(n)] )
```

- (a) Que contiennent les variables X et S après l'exécution des quatre premières instructions ?
 - (b) Expliquer pourquoi, après l'exécution de tout le script, chaque coefficient des tableaux $Z1$ et $Z2$ contient une simulation de la variable aléatoire Y_2 .
 - (c) Dans le langage Python, si A et B sont deux vecteurs de même dimension, le vecteur C défini par $C = (A == B)$ est un tableau de booléen vérifiant $C[i] = \text{False}$ lorsque $A[i] \neq B[i]$, et valant True si $A[i] = B[i]$. De plus, `np.count_nonzero(C)` compte le nombre de True dans le tableau C et renvoie un entier. Par exemple, si $A = \text{np.array}([0,2,4,6,8])$ et $B = \text{np.array}([1,2,3,6,8])$, alors $C = B == A$ est la matrice $[\text{False}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}]$ et `np.count_nonzero(C)` affiche 3.
- On suppose que l'on modifie le script précédent en prenant une valeur très grande de n (par exemple $n = 10000$) et en ajoutant les instructions suivantes :

```
p1 = np.count_nonzero(Z1[:,0] == Z1[:,1]) / n
p2 = np.count_nonzero(Z1[:,0] == Z2[:,1]) / n
```

Donner la valeur théorique approchée de p_1 et de p_2 . *On n'attend pas ici une valeur exacte, mais une formule.*

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.
- (a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \left((1 + e^t)^n + (1 + e^{-t})^n \right).$$

- (c) En utilisant l'égalité $(1 + e^{-t})^n = e^{-nt}(1 + e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et D_X le domaine de définition de la fonction K_X (Ici, $D_X = \mathbb{R}$).

(a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à D_X , l'égalité :

$$K_Y(t) = bt + K_X(at).$$

(c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi. Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et D_X et D_Y les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y .

(a) Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à D_X et D_Y , on a :

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t).$$

(b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X , Y et $X + Y$.

La suite, les questions 7 à 11 du sujet original, sont pour l'instant infaisable. Rendez vous l'année prochaine ! La suite est en revanche accessible.

Partie III — Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle ouvert $I =]-a, a[$ avec $a > 0$.

On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on a

$$M_X^{(k)}(0) = E(X^k).$$

De plus, on pose :

$$\mu_4(X) = E((X - E(X))^4).$$

7. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E(X)$ et $Q_2(X) = V(X)$.

8. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose : $S = X_1 - X_2$.

(a) Établir l'égalité :

$$E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6(V(X))^2.$$

(b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t).$$

(c) En déduire l'égalité :

$$E(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2.$$

9. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation :

$$Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2.$$

