

ECRICOME 2021 Mathématiques appliquées

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

CONCOURS D'ADMISSION 2021 MATH APPLIQUÉES

Sujet 1

EXERCICE 1

Soit $E = M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .

Soit A l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3. \quad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à A .

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in A$.
2. L'ensemble A est-il sous-espace vectoriel de E ?
3. On note

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer BX_1 et BX_2 .

- b) En déduire deux réels λ tel qu'il existe $X \neq 0$ tel que $BX = \lambda X$.

Pour ces deux λ , donner une base de l'espace vectoriel $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : BX = \lambda X\}$.

- c) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ tel que e_1, e_2 forment une base de E_{-2} et e_3 est une base de E_{-1} . Ecrire la matrice de B dans la base $\mathcal{B}$. On notera cette matrice D .

- d) Démontrer que $D \in A$, puis que $B \in A$.

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonale, telle que les éléments diagonaux de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

Montrer que $M \in A$.

Correction

Exercice 1 ECRICOME ECS 2018

On considère u et v deux endomorphismes de E , et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E .

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. (a) Vérifier que les endomorphismes u , v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
(b) Vérifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u \circ v(1, a) = \lambda(1, a)$.
(c) En déduire l'image et le noyau de $u \circ v$.
3. (a) Démontrer que $\lambda \in [0, 1]$.
(b) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$(u \circ v)^2 = \mu(u \circ v).$$

Calculer μ .

- (c) Pour quelle(s) valeur(s) de a , $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Correction

EXERCICE 1 ECRICOME 2025 Math Appliqué

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = O_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{O_3} et E_{I_3} .
2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit M une matrice de E_A .
Montrer que tM appartient à E_A . *Indication : Observez A . Cette matrice n'est-elle pas un peu particulière ?*
4. (a) Soit λ un réel.

Montrer que si il existe $X = (x, y, z)$ avec $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, alors :

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0.$$

- (b) Résoudre cette équation. On notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les trois racines de ce polynôme.
- (c) Déterminer X_1, X_2, X_3 trois vecteurs non nuls tel que $AX_i = \lambda_i X_i$, et tel que la première coordonnée de X_1 vaut 1 ; que la seconde coordonnée de X_2 vaut 1, et que la troisième coordonnée de X_3 vaille 1.
- (d) On pose $P = (X_1, X_2, X_3)$ la matrice donc les colonnes sont formées des vecteurs trouvés ci-dessus. Calculer P^2 .
En déduire une expression de P^{-1} .
- (e) Calculer $D = P^{-1}AP$.
- Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question 4.
5. (a) Soit

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que N appartient à E_D si et seulement si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D .
6. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
Montrer que M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D .
(b) En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{B}$.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(A + M)^2 = A^2 + M^2.$$

On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M .

8. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM + MA.$$

En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ .

Correction

EXERCICE 3 CONCOURS D'ADMISSION 2021 MATH APPLIQUÉES

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n -ième lancer »,
- P_n : « Obtenir Pile au n -ième lancer ».

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »,
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = P(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = P(X = n).$$

Partie A

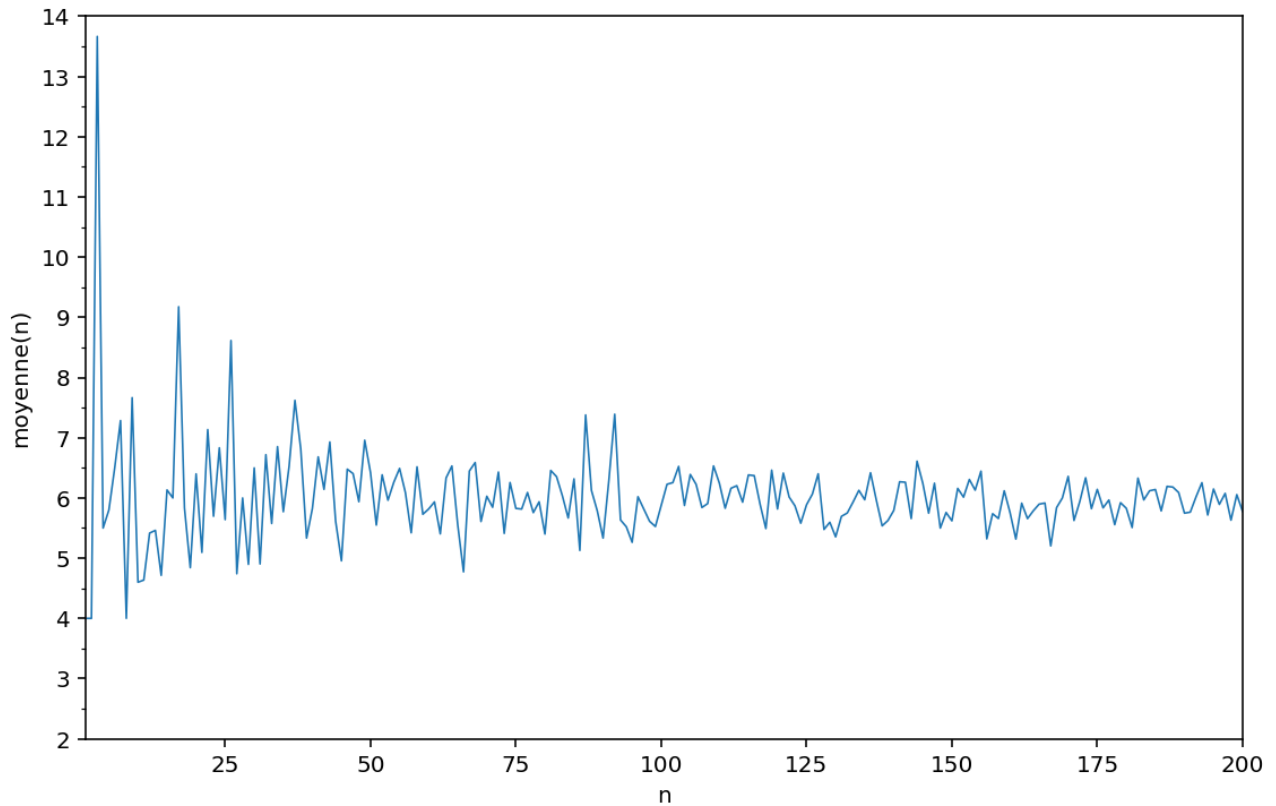
1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .
En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = \sum_{k=2}^n a_k.$$

3. a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile != .....:
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = .....
            tirs = .....
    return tirs
```

- b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def moyenne(n):` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
- c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $[1, 200]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

- b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

- c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
6. En déduire que :

$$P(X = -1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0.$$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k P(X = k).$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}.$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}.$$

9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

11. Montrer que X admet une espérance.

12. a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.

À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .

Correction

Correction Exercice 1 Ecricome 2021 MATH APPLIQUÉES

Dans $E = M_3(\mathbb{R})$, le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est constitué des matrices de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3. \quad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathcal{A}$.

1. Pour α réel, la matrice αI_3 appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \alpha I_3(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = 0_3 &\iff \alpha I_3(\alpha + 1)I_3(\alpha + 2)I_3 = 0_3 \iff \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)I_3 = 0_3 \\ &\iff \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \text{ puisque } I_3 \neq 0_3 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice αI_3 appartient donc à $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \text{ ou } \alpha = -2.$$

2. La question précédente permet de voir que $\mathcal{A}$ n'est pas un sous-espace vectoriel :

on sait par exemple que $M = -2I_3$ appartient à $\mathcal{A}$, mais alors $2M = -4I_3$ par exemple, n'appartient pas à $\mathcal{A}$ d'après 1. L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est donc pas stable par multiplication externe, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Remarque : on devait soupçonner une réponse négative au seul fait que la question posée était ouverte, et n'était pas tournée sous la forme : "Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E ".

3. On note

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Avec

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le calcul matriciel donne :

$$BX_1 = \begin{pmatrix} -1 - 1 + 0 \\ 1 - 3 + 0 \\ 1 - 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BX_2 = \begin{pmatrix} -1 - 1 + 1 \\ 1 - 3 + 1 \\ 1 - 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (b) On remarque ainsi que $BX_1 = -2X_1$ et $BX_2 = -X_1$. La question précédente nous permet de prendre $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$.

— Pour $\lambda = -2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à E_{-2} si et seulement si :

$$BX = -2X \iff (B + 2I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0 \iff x = y - z$$

Les trois lignes du système étaient redondantes; on en déduit :

$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Le sous-espace propre est ainsi engendré par deux vecteurs non-colinéaires, qui forment donc une famille libre : ces deux vecteurs forment donc une base de E_{-2} , et $\dim E_{-2} = 2$.

— On résout le système, et on obtient $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- (c) On prend notre temps. On note $e_1, e_2, e_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

- $Be_1 = -2e_1$
- $Be_2 = -2e_2$
- $Be_3 = -e_3$.

Donc, la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Comme D est diagonale et I_3 aussi, on vérifie facilement que D appartient à $\mathcal{A}$:

$$D(D + I_3)(D + 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

puisque le produit de matrices diagonales correspond à un produit terme à terme des matrices, et que chaque élément diagonale du produit fera intervenir un facteur nul à chaque fois.

Ainsi, D appartient bien à $\mathcal{A}$.

On note u l'endomorphisme associé à $D(D + I_3)(D + 2I_3)$. On voit donc que $u = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3) . Donc, $u = 0$ dans la base canonique. Or, dans la base canonique, la matrice associée à $D(D + I_3)(D + 2I_3)$ est $B(B + I_3)(B + 2I_3)$. Donc, $B(B + I_3)(B + 2I_3) = 0$.

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonale dont les coefficients diagonaux sont inclus dans $\{0; -1; 2\}$: cela signifie que la matrice M vaut

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels dans $\{0; -1; -2\}$. Mais alors, en reprenant le même cheminement qu'en 3.d) :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = \begin{pmatrix} a(a+1)(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & b(b+1)(b+2) & 0 \\ 0 & 0 & c(c+1)(c+2) \end{pmatrix},$$

où l'appartenance de a, b, c à $\{0; -1; -2\}$ implique toujours :

$$a(a+1)(a+2) = b(b+1)(b+2) = c(c+1)(c+2) = 0,$$

l'un des trois facteurs de chaque produit sera forcément nul.

Ainsi M appartient à $\mathcal{A}$.

Correction Exercice 1 Ecricome 2018 ECS

$$1. \quad A^2 = \frac{1}{(1+a^2)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & a+a^3 \\ a+a^3 & a^2+a^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+a^2)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & a(1+a^2) \\ a(1+a^2) & a^2(1+a^2) \end{pmatrix} = A.$$

Comme A est la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique, $u^2 = u$. Ainsi u est un projecteur.

$$B^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B. \text{ Comme } B \text{ est la matrice de l'endomorphisme } v \text{ dans la base canonique, } v^2 = v.$$

Donc v est un projecteur.

$$2. \quad (a) \quad \text{Remarquons que } \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}. \text{ Donc les colonnes de } A \text{ sont colinéaires.}$$

Or $A \neq 0$. Donc A et aussi u est de rang 1.

— les colonnes de la matrice B sont égales et non nulles. Donc $rg(v) = 1$.

$$A \times B = \frac{1+a}{2(1+a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $A \times B$ sont égales. Et si $a \neq -1$, $A \times B$ n'est pas la matrice nulle. Donc $rg(u \circ v) = 1$.

Si $a = -1$, $A \times B = 0$. Donc $rg(u \circ v) = 0$.

$$\text{Ainsi } rg(u \circ v) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq -1 \\ 0 & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

Remarque : l'énoncé comportait ici une imprécision sur les valeurs de a (la question était fausse si $a = -1$). En cas d'erreur d'énoncé de la sorte, le barème de correction en tient toujours compte et les candidats qui ne remarquent pas l'erreur ne sont pas sanctionnés. Les candidats qui repèrent l'erreur peuvent parfois selon les cas obtenir un bonus de points.

$$(b) \quad \text{En effectuant le calcul, } AB \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}. \text{ Donc } uv(1, a) = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} (1, a). \text{ Donc, } \lambda = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}.$$

(c) — Si $a = -1$ alors $u \circ v$ est nul. Donc, son noyau est $\mathbb{R}^2$ et son image $\{0\}$. (c'est le noyau et l'image de l'application nulle)

— Supposons $a \neq -1$. Comme $u \circ v$ est de rang 1, son noyau est de dimension 1 et son image de dimension 1 par le théorème du rang.

On a, par la question ci-dessus, que $\text{Vect}\{(1, a)\} \subset \text{Im}(u \circ v)$. Par dimension, on obtient que $\text{Vect}\{(1, a)\} = \text{Im}(u \circ v)$.

Pour le noyau, on remarque que $u \circ v(1, -1) = (0, 0)$ en regardant visuellement les vecteurs annulant B . (On peut aussi faire le calcul pour déterminer le noyau si l'on ne voit pas cela). Donc, $\text{Vect}\{(1, -1)\} \subset \text{Ker}(u \circ v)$. Par égalité des dimensions des espaces considérés, on obtient que $\text{Vect}\{(1, -1)\} = \text{Ker}(u \circ v)$.

$$3. \quad (a) \quad \text{D'après la question précédente, } \lambda = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}. \text{ Or,}$$

$$\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \geq 0.$$

$$1 - \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = \frac{(1-a)^2}{2(1+a^2)} \geq 0,$$

Donc $\lambda \in [0, 1]$.

(b) — Si $a = -1$ alors $u \circ v$ est nul donc $u \circ v$ est un projecteur.

— Supposons $a \neq -1$.

★ Si $u \circ v$ est un projecteur alors $(u \circ v) \circ (u \circ v) = (u \circ v)$. En appliquant ces deux applications à $(1, a)$, on trouve que $\lambda^2(1, a) = \lambda(1, a)$, soit que $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

$$\text{Or } \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \neq 0.$$

Et $\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1$ si et seulement si $(1+a)^2 = 2(1+a^2)$ si et seulement si $1+a^2-2a=0$ si et seulement si $a=1$.

★ Réciproquement si $a=1$ alors $A=B$, donc $AB=B^2=B$. Donc AB est un projecteur.

Ainsi $u \circ v$ est un projecteur si et seulement $a \in \{-1, 1\}$.

Correction Exercice 1 Ecricome 2025 Math appliqué

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $M \in E_{O_3} \iff O_3M + MO_3 = O_3 \iff O_3 = O_3$. Donc : $E_{O_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De même :

$$\begin{aligned} M \in E_{I_3} &\iff I_3M + MI_3 = O_3 \\ &\iff 2M = O_3 \\ &\iff M = O_3. \end{aligned}$$

Donc : $E_{I_3} = \{O_3\}$.

2. Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par définition, $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. De plus : $CO_3 + O_3C = O_3$, donc $O_3 \in E_C$.

Soient $M, N \in E_C$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} C(\alpha M + N) + (\alpha M + N)C &= \alpha CM + CN + \alpha MC + NC \\ &= \alpha(CM + MC) + (CN + NC) \\ \text{Car } M, N \in E_C &= \alpha O_3 + O_3 \\ &= O_3. \end{aligned}$$

Donc $\alpha M + \beta N \in E_C$.

Ainsi : E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in E_A$. On remarque que A est symétrique, donc ${}^tA = A$. Comme $M \in E_A$, on a : $AM + MA = O_3$. En transposant cette égalité :

$$\begin{aligned} {}^t(AM + MA) &= {}^tO_3 \\ \iff {}^t(AM) + {}^t(MA) &= O_3 \\ \iff {}^tM {}^tA + {}^tA {}^tM &= O_3 \\ \text{Car } {}^tA = A &\iff {}^tMA + A {}^tM = O_3. \end{aligned}$$

Donc : $A {}^tM + {}^tMA = O_3$. Ainsi : ${}^tM \in E_A$.

4. (a) Après calculs : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ puis : $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$. Donc :

$$A^3 = 9A.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $X \neq 0$ tel que : $AX = \lambda X$. Alors : $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$, puis : $A^3X = A(A^2X) = A(\lambda^2 X) = \lambda^2 AX = \lambda^3 X$. Or $A^3 = 9A$, donc : $A^3X = 9AX = 9\lambda X$. Ainsi : $\lambda^3 X = 9\lambda X$, donc : $(\lambda^3 - 9\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on en déduit : $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 9\lambda = 0 &\iff \lambda(\lambda^2 - 9) = 0 \\ &\iff \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \\ &\iff \lambda = -3 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, on obtient : $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 3$.

(c) On cherche d'abord un vecteur X_1 non nul tel que : $AX_1 = -3X_1$. On pose : $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
 AX_1 = -3X_1 &\iff (A + 3I_3)X_1 = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
 \text{Car } L_2 \text{ devient } 0 = 0 \text{ une fois } L_1 \text{ et } L_3 \text{ mis de cette manière} &\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme la première coordonnée de X_1 vaut 1, on prend $x = 1$, donc : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On cherche ensuite un vecteur X_2 non nul tel que : $AX_2 = 0$. On pose : $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
 AX_2 = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = x \\ z = 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme la deuxième coordonnée de X_2 vaut 1, on prend $y = 1$, donc : $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Enfin, on cherche un vecteur X_3 non nul tel que : $AX_3 = 3X_3$. On pose : $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
 AX_3 = 3X_3 &\iff (A - 3I_3)X_3 = 0 \\
 &\iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -y \\ y = 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme la troisième coordonnée de X_3 vaut 1, on prend $z = 1$, donc : $X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3.$$

Donc : $P \times \frac{1}{9}P = I_3$. Ainsi : $P^{-1} = \frac{1}{9}P$.

(e) En effectuant le calcul, on trouve $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a : $N \in E_D \iff DN + ND = O_3$. Or :

$$DN = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix},$$

et :

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$DN + ND = \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$N \in E_D \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ h = 0 \\ i = 0. \end{cases}$$

Donc :

$$N \in E_D \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) D'après la question précédente :

$$E_D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

On pose :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La famille (B_1, B_2, B_3) est génératrice de E_D .

Elle est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (elle est échelonnée, aussi).

Ainsi : $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ est une base de E_D et : $\dim(E_D) = 3$.

6. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose : $N = P^{-1}MP$. Alors : $M = PNP^{-1}$. De plus : $A = PDP^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff AM + MA = O_3 \\ &\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = O_3 \\ &\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = O_3 \\ &\iff P(DN + ND)P^{-1} = O_3. \end{aligned}$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P , on obtient :

$$P(DN + ND)P^{-1} = O_3 \iff DN + ND = O_3.$$

Donc, $\boxed{M \in E_A \iff N \in E_D}$.

- (b) D'après la question précédente : $M \in E_A \iff P^{-1}MP \in E_D$. Or $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ est une base de E_D . Ainsi, pour toute matrice $M \in E_A$, il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$P^{-1}MP = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3.$$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$M = \alpha PB_1P^{-1} + \beta PB_2P^{-1} + \gamma PB_3P^{-1}.$$

Donc : $\boxed{(PB_1P^{-1}, PB_2P^{-1}, PB_3P^{-1}) \text{ est une base de } E_A}$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} (A + M)^2 = A^2 + M^2 &\iff (A + M)(A + M) = A^2 + M^2 \\ &\iff A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2 \\ &\iff AM + MA = O_3 \\ &\iff M \in E_A. \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (A + M)^2 = A^2 + M^2\} = E_A}$.

8. Par définition :

$$M \in \ker(\varphi) \iff \varphi(M) = O_3 \iff AM + MA = O_3 \iff M \in E_A.$$

Donc, $\ker(\varphi) = E_A$. D'après la question 7, on sait que : $\dim(E_A) = 3$. Donc : $\dim(\ker(\varphi)) = 3$. Or : $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \text{rg}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)).$$

Ainsi : $9 = \text{rg}(\varphi) + 3$. Donc : $\boxed{\text{rg}(\varphi) = 6}$.

Correction Exercice 3 ECRICOME 2021 ECE

Partie A

1. L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si on obtient Pile aux deux premiers lancers : $[X = 2] = P_1 \cap P_2$. Comme la pièce est équilibrée et les lancers indépendants :

$$a_2 = P(X = 2) = P(P_1) \times P(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Selon le même principe : $[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$, donc :

$$a_3 = P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Enfin : $[X = 4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$. L'union est disjointe et les lancers sont indépendants, donc :

$$a_4 = P(X = 4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. L'événement U_n est réalisé si et seulement si on a obtenu au moins deux Piles consécutifs au cours des n premiers lancers. Cela revient à dire que le premier double Pile apparaît à un rang k compris entre 2 et n .

Ainsi : $U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k]$. Cette union est disjointe, car le premier double Pile, s'il survient, ne se produit

qu'une seule fois. Donc : $P(U_n) = \sum_{k=2}^n P(X = k)$. Autrement dit : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

3. a) La fonction Python suivante simule les lancers de la pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de deux Piles consécutifs et renvoie le nombre de lancers effectués.

La variable `pile` joue le rôle d'interrupteur : tant qu'on n'a pas eu deux Piles consécutifs, sa valeur reste strictement inférieure à 2. Un premier Pile l'incrmente d'une unité, mais si on obtient un Face juste après, elle retourne à la valeur 0. La variable `tirs` compte le nombre total de lancers effectués.

```
import numpy.random as rd

def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile != 2:
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = 0
        tirs = tirs + 1
    return tirs
```

- b) Il y a plusieurs façons possibles d'écrire la fonction demandée. Une première méthode consiste à construire une liste de n simulations de l'expérience et à calculer la moyenne des résultats obtenus.

```
def moyenne(n):
    V = []
    for i in range(n):
        V.append(simulX())
    return sum(V)/n
```

On peut aussi construire directement la somme des résultats des n simulations avec une boucle `for`, puis diviser à la fin par le nombre de simulations.

```
def moyenne(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + simulX()
    return s/n
```

- c) Le graphe de l'énoncé affiche des valeurs de `moyenne(n)` pour n variant de 1 à 200 : on constate que plus n est grand, plus ces moyennes se stabilisent autour d'une valeur très proche de 6.

En application de la loi faible des grands nombres, on peut donc conjecturer que la variable aléatoire X admet une espérance, sans doute égale à 6.

Partie B

4. a) Pour tout entier $n \geq 2$, d'après la formule du crible : $P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1})$. Il suffit donc de vérifier que : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$.

Or l'événement U_{n+1} est réalisé si et seulement si on voit apparaître au moins deux Piles consécutifs au cours des $n + 1$ premiers lancers.

Il y a alors deux possibilités :

- deux Piles consécutifs ont déjà été obtenus au cours des n premiers lancers, ce qui correspond à l'événement U_n ;
- deux Piles consécutifs apparaissent aux lancers n et $n + 1$, ce qui correspond à l'événement B_{n+1} .

Il n'y a pas d'autre possibilité, donc : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$. Ainsi :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

b) Soit $n \geq 4$.

Les événements U_n et B_{n+1} ne sont pas incompatibles car on peut avoir eu un premier double Pile au cours des n premiers lancers, et un nouveau double Pile aux lancers n et $n+1$.

Si on considère les quatre derniers lancers jusqu'au $(n+1)$ -ième, il y a deux possibilités.

— Soit on a effectivement eu un double Pile aux lancers n et $n+1$, et aussi un Pile au lancer $n-1$.
On a alors un double Pile aux lancers $n-1$ et n , ce qui compte pour la réalisation de U_n .

On est donc dans l'événement : $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.

— Soit on a bien eu un double Pile aux lancers n et $n+1$, mais un Face au lancer $n-1$.

Dans ce cas, U_n est réalisé si et seulement si le premier double Pile a été obtenu au cours des $n-2$ premiers lancers, puisqu'il ne peut pas intervenir aux lancers $n-2$ et $n-1$, ni aux lancers $n-1$ et n , à cause du Face au $(n-1)$ -ième lancer.

On est donc dans l'événement : $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.

Finalement : $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$, et cette union est disjointe.

c) D'après la question précédente : $P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$. Comme les lancers sont indépendants, les événements de chacune des deux intersections ci-dessus sont mutuellement indépendants. Donc :

$$\begin{aligned} P(U_n \cap B_{n+1}) &= P(U_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) + P(P_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) \\ &= u_{n-2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

De plus : $P(B_{n+1}) = P(P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{4}$. En reprenant la relation obtenue en 4.a), on obtient :

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) \\ &= u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}u_{n-2} - \frac{1}{8} \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}). \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \geq 4, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$

5. D'après la question précédente, pour tout $n \geq 4$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Or u_{n-2} est une probabilité, donc : $0 \leq u_{n-2} \leq 1$. Ainsi : $1 - u_{n-2} \geq 0$, donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est donc croissante. De plus, pour tout $n \geq 4$, u_n est une probabilité, donc : $u_n \leq 1$. La suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante et majorée, donc elle converge d'après le théorème de limite monotone.

Notons : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. La relation de récurrence obtenue en 4.c) et l'unicité de la limite donnent :

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell) \iff 0 = \frac{1}{8}(1 - \ell) \iff \ell = 1.$$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$

6. L'événement $[X = -1]$ est, par définition, réalisé si et seulement si on n'obtient jamais deux Piles consécutifs. On a donc :

$$[X = -1] = \bigcap_{n=2}^{+\infty} \overline{U_n}.$$

D'après la loi de De Morgan : $[X = -1] = \overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n}$. Donc : $P(X = -1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right).$

Or l'égalité $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ obtenue à la question 4.a) montre que : $U_n \subset U_{n+1}$. Ainsi, $(U_n)_{n \geq 2}$ est une suite croissante d'événements.

Par le théorème de la limite monotone :

$$P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Donc : $P(X = -1) = 1 - 1 = 0.$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 1 - u_n$ et $S_n = \sum_{k=2}^n kP(X = k)$.

7. Pour tout entier $n \geq 4$, en reprenant la relation obtenue en 4.c), et comme $v_n = 1 - u_n$, on a :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - (1 - u_{n+1}) \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \\ &= \frac{1}{8}v_{n-2}. \end{aligned}$$

8. Pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = 1 - u_n = P(\overline{U_n})$ est la probabilité de ne jamais voir apparaître de double Pile au cours des n premiers lancers.

On a donc : $\overline{U_n} = [X > n]$. Or X est une variable aléatoire à valeurs entières supérieures ou égales à 2, sauf sur l'événement $[X = -1]$ qui est de probabilité nulle d'après la question précédente.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$: $[X > n] = [X = n+1] \cup [X > n+1]$. Cette union est disjointe. Donc : $P(X > n) = P(X = n+1) + P(X > n+1)$. Autrement dit : $v_n = P(X = n+1) + v_{n+1}$. Ainsi :

$$\boxed{P(X = n+1) = v_n - v_{n+1}.}$$

9. Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, la propriété $P(n)$ suivante est vraie :

$$P(n) : \quad S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

Initialisation. Pour $n = 2$, on a : $S_2 = 2P(X = 2) = 2a_2 = \frac{1}{2}$. D'autre part, d'après la question 2 : $v_2 = 1 - u_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, et : $v_4 = 1 - u_4 = 1 - (a_2 + a_3 + a_4) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Donc :

$$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 8 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{4} = 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi : $S_2 = 6 - 8v_4 - 2v_2$. Donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Par définition des sommes S_n : $S_{n+1} = S_n + (n+1)P(X = n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence et la question 8 :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) \\ &= 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} \end{aligned}$$

D'où, pour vérifier si $P(n+1)$ est vraie :

$$P(n+1) \text{ vraie} \iff 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} = 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1} \iff 8(v_{n+3} - v_{n+2}) = -v_n,$$

ce qui est vraie d'après la question 7 appliquée à $n+2$.

10. Pour tout $n \geq 2$:

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)P(X = n+1) \geq 0.$$

La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est donc croissante.

De plus, pour tout $n \geq 2$, les nombres v_{n+2} et v_n sont positifs car ils représentent des probabilités. D'après la question précédente : $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$. Donc : $S_n \leq 6$. La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est donc croissante et majorée. Elle converge d'après le théorème de limite monotone.

11. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{k \geq 2} kP(X = k)$$

est absolument convergente.

Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cela revient à prouver la convergence simple de la série, c'est-à-dire à étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ des sommes partielles de cette série.

D'après la question précédente, la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ converge. Donc X admet une espérance.

$$\text{De plus : } \boxed{E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.}$$

12. a) D'après la question 9, $nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$. Or : $v_{n+2} = 1 - u_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - 1 = 0$, d'après la question 5, et (S_n) converge vers la valeur finie $E(X)$ d'après la question 11. Ainsi, la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ est convergente comme somme de suites convergentes. On note $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n$.

b) Supposons que $\lambda \neq 0$.

Comme v_n est une probabilité, on a $v_n \geq 0$, donc $nv_n \geq 0$. Ainsi : $\lambda > 0$. Dans ce cas : $nv_n \sim \lambda$, donc : $v_n \sim \frac{\lambda}{n}$. Or la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\lambda}{n}$$

est divergente, car c'est, à un facteur strictement positif près, la série harmonique.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ serait divergente.

D'autre part, d'après la question 7, pour tout $n \geq 4$: $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$. En décalant les indices, pour tout $n \geq 2$: $v_n = 8(v_{n+2} - v_{n+3})$. Donc, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n v_k &= \sum_{k=2}^n 8(v_{k+2} - v_{k+3}) \\ &= 8 \sum_{k=2}^n (v_{k+2} - v_{k+3}) \\ &= 8(v_4 - v_{n+3}). \end{aligned}$$

Or, $v_{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc :

$$\sum_{k=2}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 8v_4.$$

La série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge donc, ce qui contredit ce qui précède.

L'hypothèse $\lambda \neq 0$ est donc absurde. Ainsi : $\boxed{\lambda = 0}$.

c) On reprend la relation obtenue à la question 9 :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

Or : $v_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $nv_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$. Comme : $E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, on obtient :

$$\boxed{E(X) = 6}.$$