
Concours Blanc 2

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME 2 EM Lyon 2022 ECS

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k, n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé le **nombre de Catalan d'ordre n** , défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. Calculer les réels c_0 , c_1 et c_2 .

2. a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

4. Écrire une fonction Python d'en-tête `def catalan(n):`, qui, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de c_n .

5. a. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. a. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}.$$

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}.$$

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \frac{n}{2} S_n$$

(on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n).

b. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = c_{n+1}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

8. a. Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = 2x f(x).$$

On admet que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

- b. Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n,$$

montrer :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

- c. En déduire :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad (g(x))^2 = 2g(x) - 4x.$$

- d. Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 + \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

- e. En déduire :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$$

PARTIE B : Loi du demi-cercle

Normalement, cette partie est une partie de proba. Cela dit, aucune des questions ne peut se traduire par de l'analyse, donc vous êtes en train de faire exactement le sujet, mais j'ai simplement "retiré" le vernis de proba

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in [-2; 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. a. Montrer :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

- b. En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2 \sin(t)$, la valeur de

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) dx.$$

10. Montrer que φ est positive, et vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$.

11. a. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(t) dt$ converge, et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1} \varphi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

b. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} \varphi(t) dt.$$

i. Calculer u_0 .

ii. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}).$$

iii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c_n.$$

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0; 1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1 - p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement $P-P-F-P-F-F-P-F \dots$ (où P désigne Pile et F désigne Face), alors la variable aléatoire T est égale à 6.

12. a. Écrire une fonction Python, d'en-tête `def simule(p):`, qui prend en argument le réel p , qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

b. On exécute le script Python suivant :

```
for i in range(1, 4):
    L = [0]*3
    for j in range(3):
        m = 0
        for k in range(1000):
            m = m + simule(i/4)
        L[j] = m/1000
    print(L)
```

et on obtient les résultats suivants :

1.392	1.478	1.41
100.572	71.172	125.28
1.454	1.544	1.414

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

13. Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = 2n + 1) = 0.$$

14. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours strictement supérieur au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$d_n = \text{Card}(D_n).$$

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours supérieur ou égal au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose $e_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$e_n = \text{Card}(E_n).$$

Par exemple,

$$D_3 = \{ P-P-P-F-F-F, P-P-F-P-F-F \}$$

et

$$E_3 = \{ \text{P-F-P-F-P-F}, \text{P-F-P-P-F-F}, \text{P-P-F-F-P-F}, \text{P-P-F-P-F-F}, \text{P-P-P-F-F-F} \};$$

ainsi $d_3 = 3$ et $e_3 = 5$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier :

$$d_n = e_{n-1}.$$

- b. i. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

- ii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}.$$

- iii. Montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = c_n$$

où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n .

- c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T = 2n) = 2 c_{n-1} p^n (1-p)^n.$$

15. a. Montrer que, pour tout x de $[-1; 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n) x^n$ converge.
On pose, pour tout x de $[-1; 1]$:

$$G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) x^n.$$

- b. Montrer :

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left(p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2} \right).$$

- c. Montrer :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad G_T(x) = \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1-p)x^2),$$

où g est la fonction définie dans la question A.8.

- d. En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer :

$$\mathbb{P}(T = 0) = |2p - 1|.$$

Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

16. En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :

- a. si $p \neq \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.
b. si $p = \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

Corrigé

Problème EDHEC 2021 Math Appliqué

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p , élément de $]0; 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la k -ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la k -ième manche ».

On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n -ième manche ».

1) Étude de la première manche.

- Donner la loi commune à X_1 et Y_1 . En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.
- Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1 .
- Montrer que

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(Y_1 = i)$$

et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q .

- Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q .

2) Calcul de la probabilité de l'événement G

- Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $(X_n < Y_n)$.
- Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

- Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.
- Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que :

$$P(G) = \frac{1}{2}.$$

- Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $P(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

- 3) a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer que

$$P(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{pq}{1+q}.$$

- En déduire la probabilité μ que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.
- 4) a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la n -ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.
- 5) Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à Python (avec `import numpy.random as rd`) de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

- 6) Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = float(input('entrez une valeur pour p'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = -----
    Y = -----
    c = -----
if X < Y:
    -----
else:
    -----
print(c)
```

- 7) Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée à la fin du script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur ?

```
if -----:
    print('A gagne le deuxieme jeu')
else:
    -----
```

Corrigé

Correction Problème 2 EM Lyon 2022 ECS

Partie A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. On a $c_0 = \frac{1}{0+1} \binom{0}{0} = 1$, $c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1$ et $c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = 2$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!(n+1)}{(n+1)!n!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= c_n. \end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, c_n est la différence de deux entiers naturels, donc c_n est un entier relatif. De plus : $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} > 0$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{\frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{n!n!}{(2n)!} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.}$

4. On peut utiliser la relation de récurrence obtenue à la question précédente.

```
def catalan(n):  
    c = 1  
    for k in range(n):  
        c = (2*(2*k+1)*c)//(k+2)  
    return c
```

5. a. D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$. Or :

$$\frac{2(2n+1)}{n+2} \geq 1 \iff 4n+2 \geq n+2 \iff 3n \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $c_n > 0$, on en déduit que La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que la suite (c_n) ne diverge pas vers $+\infty$.

Comme elle est croissante, elle converge alors vers un réel ℓ .

De plus, comme $c_n \geq c_0 = 1$, on a : $\ell \geq 1$. Ainsi : $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $c_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Donc : $\frac{c_{n+1}}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Or, d'après la question 3 :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4.$$

C'est absurde. Donc, $\boxed{c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.}$

6. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question 3, $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$. Montrons d'abord :

$$4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{2(2k+1)}{k+2} \iff 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{2k+1}{k+2}$$

Comme les deux membres sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2k+1}{k+2} \right)^2 - \left(2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \right)^2 &= \frac{(2k+1)^2}{(k+2)^2} - \frac{4k^3}{(k+1)^3} \\ &= \frac{((2k+1)^2(k+1)^3 - 4k^3(k+2)^2)}{(k+2)^2(k+1)^3} \\ &= \frac{(9k^3 + 19k^2 + 7k + 1)}{(k+2)^2(k+1)^3} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc : $4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k}$. Montrons ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{2(2k+1)}{k+2} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2} &\iff \frac{2k+1}{k+2} \leq 2 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2} \iff 2k+1 \leq 2\sqrt{\frac{(k+1)^3}{k+2}} \\ &\iff (2k+1)^2(k+2) \leq 4(k+1)^3 \iff 0 \leq 3k+2. \end{aligned}$$

b. *Inspiré de la copie d'Alban, en ligne*

On a, par la question ci-dessus,

$$c_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k}.$$

Donc, en multipliant les inégalités et par la question ci-dessus,

$$c_n \leq \prod_{k=1}^{n-1} 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right) = \frac{4^{n-1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{(n)\sqrt{n}}.$$

De même,

$$c_n \geq \prod_{k=1}^{n-1} 4 \left(\frac{k}{k+1} \right) = \frac{4^{n-1}}{(n)\sqrt{n}} = \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

7. a. Avec le changement d'indice $i = n - k$, on a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=0}^n (n-i)c_{n-i}c_i \\ &= n \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i} - \sum_{i=0}^n i c_i c_{n-i} \\ &= nS_n - T_n. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 2T_n = nS_n \iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \frac{n}{2} S_n.}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k c_k c_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k} \\ &= c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) c_k c_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Par la question 3, appliquée au rang $k-1$, $c_k = \frac{2(2k-1)}{k+1}c_{k-1}$. Donc, $(k+1)c_k = 2(2k-1)c_{k-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} 2(2k-1)c_{k-1}c_{n+1-k} \\ \text{Avec } i = k-1 &= c_{n+1} + \sum_{i=0}^n 2(2i+1)c_i c_{n-i} \\ &= c_{n+1} + 4 \sum_{i=0}^n i c_i c_{n-i} + 2 \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i} \\ &= c_{n+1} + 4T_n + 2S_n. \end{aligned}$$

c. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : \quad S_n = c_{n+1}.$$

Initialisation. Pour $n = 0$:

$$S_0 = c_0 c_0 = 1.$$

Or :

$$c_1 = 1.$$

Donc :

$$S_0 = c_1.$$

Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a, par la 7.b. :

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= c_{n+1} + 4T_n + 2S_n \\ \text{Par la question 7.a. } \iff S_{n+1} + \frac{n+1}{2}S_{n+1} &= c_{n+1} + 2nS_n + 2S_n \\ \text{Par } P(n) \iff \frac{n+3}{2}S_{n+1} &= (2n+3)c_{n+1} \\ \iff S_{n+1} &= \frac{2(2n+3)}{n+3}c_{n+1} \end{aligned}$$

Par la question 3, le terme de droite vaut c_{n+2} . Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

8. a. Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. D'après la question 6.b, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et puisque $|x| \leq \frac{1}{4}$:

$$0 \leq c_n |x|^n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} |x|^n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ converge comme série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} c_n |x|^n$ converge. Donc la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge absolument, donc converge.

- b. Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. *Je suis assez désespéré par leur égalité qui est fausse... Mais bon, on va partir de cela ? Normalement, la somme doit avoir une indicatrice $1\{k \leq N\}1\{n-k \leq N\}$, ce qui rend cela pénible pour faire les passages à la limite. Mais bon, avec leur indication, tout se passe très bien.*

Par la remarque de l'énoncé, et par la question 7.c),

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^N c_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^N c_n x^n\right) &= \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{2N} c_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

Le terme de gauche passe à la limite, donc celui de droite aussi, et on obtient, par passage à la limite et en posant $k = n+1$,

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^{k-1}.$$

c. Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. $(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$. Donc :

$$\begin{aligned} (g(x))^2 &= 4x^2(f(x))^2 \\ \text{Par la 8.b)} &= 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1} \\ &= 4x \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \\ &= 4x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - c_0 \right) \\ &= 4x(f(x) - 1) \\ &= 4xf(x) - 4x \\ &= 2g(x) - 4x. \end{aligned}$$

d. Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. On a, d'après la question précédente :

$$(g(x))^2 = 2g(x) - 4x \iff (g(x))^2 - 2g(x) + 4x = 0 \iff (g(x) - 1)^2 = 1 - 4x.$$

Comme $x \leq \frac{1}{4}$, le terme de droite est positif. Donc, $g(x) - 1 = \sqrt{1 - 4x}$ ou $g(x) - 1 = -\sqrt{1 - 4x}$.

Il existe donc une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\boxed{\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 + \varepsilon(x)\sqrt{1 - 4x}.$$

Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, on a $\sqrt{1 - 4x} > 0$, donc :

$$\varepsilon(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{1 - 4x}}.$$

Par hypothèse, f est continue, donc g l'est. Ainsi, la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

e. On a : $g(0) = 2 \times 0 \times f(0) = 0$. Or, d'après la question précédente : $g(0) = 1 + \varepsilon(0)\sqrt{1} = 1 + \varepsilon(0)$.

Donc, $\varepsilon(0) = -1$. La fonction ε est continue sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et ne prend que les valeurs -1 et 1 . Si elle prenait la valeur 1 en un point de cet intervalle, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prendrait aussi la valeur 0 entre ce point et 0 , ce qui est impossible.

Donc :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad \varepsilon(x) = -1.$$

Ainsi : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$. Il nous reste à montrer que c'est vrai en $x = \frac{1}{4}$.

Par continuité de g en $\frac{1}{4}$, on a donc bien que $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} 1 - \sqrt{1 - 4x} = g(1/4)$, donc la formule est aussi vraie en $x = 1/4$.

Partie B : Loi du demi-cercle

9. a. On utilise la formule $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} [t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \pi + 0 \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

- b. i. **Bornes :**

bornes	-2	2
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

- ii. Si on pose $\phi : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto 2 \sin(t)$, alors : $\phi' : t \mapsto 2 \cos(t) > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc le changement de variable est bien légal.
- iii. Avec $x = 2 \sin(t)$, on obtient : $dx = 2 \cos(t) dt$. Donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 \varphi(x) dx &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx \\
 \text{Par le CDV de l'énoncé} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2(t)} \times 2 \cos(t) dt \\
 \text{Car } 1 - \sin^2 = \cos^2 \text{ et que } \cos \geq 0 \text{ sur } [-\pi/2, \pi/2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) \times 2 \cos(t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a évidemment $\varphi(x) \geq 0$. De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-2}^2 \varphi(t) dt = 1$ d'après la question précédente.

11. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n \varphi(t)$ est nulle en dehors de $[-2, 2]$, et elle est continue sur $[-2, 2]$. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \varphi(t) dt = \int_{-2}^2 t^n \varphi(t) dt \text{ converge comme intégrale sur un segment d'une fonction continue sur } [-2, 2].$$

De plus, la fonction φ est paire. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{2n+1} \varphi(t)$ est impaire. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} \varphi(t) dt = 0.}$$

Enfin, la fonction $t \mapsto t^{2n} \varphi(t)$ est paire. Donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \varphi(t) dt &= \int_{-2}^2 t^{2n} \varphi(t) dt \\
 &= 2 \int_0^2 t^{2n} \varphi(t) dt \\
 &= \boxed{\frac{1}{\pi} \int_0^2 t^{2n} \sqrt{4 - t^2} dt.}
 \end{aligned}$$

- b. i. On a : $u_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$. D'après la question 10 : $\boxed{u_0 = 1.}$

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'astuce ici est de faire une IPP avec x en facteur de $\sqrt{4-x^2}$ afin d'obtenir une primitive usuelle de $u'\sqrt{u}$.

D'après la question 11.a : $u_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n+2} \sqrt{4-x^2} dx$. On pose $u : x \mapsto x^{2n+1}$ et $v' : x \mapsto x\sqrt{4-x^2}$, donc $v : x \mapsto -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}$.

Les fonctions u et v sont dans $\mathcal{C}^1([0, 2])$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n+1} x \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{3} x^{2n+1} (4-x^2)^{3/2} \right]_0^2 + \frac{2n+1}{3} \int_0^2 x^{2n} (4-x^2)^{3/2} dx \right) \\ &= \frac{2n+1}{3\pi} \int_0^2 x^{2n} (4-x^2) \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{2n+1}{3\pi} \left(4 \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^2 x^{2n+2} \sqrt{4-x^2} dx \right) \\ &= \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}). \end{aligned}$$

- iii. D'après la question précédente :

$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}) \iff (2n+4)u_{n+1} = 4(2n+1)u_n \iff u_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} u_n.$$

Or, d'après la question 3 : $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$. De plus : $u_0 = 1 = c_0$.

Une récurrence rapide montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c_n.}$

Partie C : Étude d'une expérience aléatoire

12. a. Une fonction Python possible est la suivante :

```
import numpy.random as rd

def simule(p):
    nbP = 0
    nbF = 0
    for k in range(10**4):
        if rd.random() < p:
            nbP = nbP + 1
        else:
            nbF = nbF + 1
        if nbP == nbF:
            return k
    return 0
```

- b. Le script calcule, pour $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$, trois moyennes empiriques de 1000 simulations de la variable aléatoire T .

La première ligne correspond à $p = \frac{1}{4}$, la deuxième à $p = \frac{1}{2}$, et la troisième à $p = \frac{3}{4}$.

On observe que, pour $p = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{3}{4}$, les moyennes sont proches d'une valeur assez petite, environ 1,5.

Pour $p = \frac{1}{2}$, les valeurs obtenues sont beaucoup plus grandes et très fluctuantes. Cela laisse conjecturer que le comportement de T est très différent lorsque la pièce est équilibrée.

On peut conjecturer que : $\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2}, \text{ la variable } T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Après un nombre impair de lancers, il est impossible d'avoir obtenu autant de Pile que de Face (pour que les deux soient égaux, il faut que le nombre de lancers soit pair, car le nombre de lancers est la somme du nombre de pile et du nombre de face) Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = 2n+1) = 0.}$

14. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine nécessairement par un Face. En effet :

- si le premier lancer était Face, alors le nombre de Pile ne serait pas strictement supérieur au nombre de Face au cours du premier lancer : c'est donc impossible.
- comme à l'issue du $2n$ -ième lancer il y a autant de Pile que de Face, et que le nombre de Pile est strictement supérieur au nombre de Face au cours des $2n - 1$ premiers lancers, le dernier lancer est nécessairement Face.

Ainsi, à tout résultat de D_n , on peut retirer le premier Pile et le dernier Face. On obtient alors un résultat de E_{n-1} .

Réciproquement, à tout résultat de E_{n-1} , on peut ajouter un Pile au début et un Face à la fin. On obtient alors un résultat de D_n .

On a donc une bijection entre D_n et E_{n-1} .

Ainsi : $d_n = e_{n-1}$.

- b. i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule vient en considérant le premier temps où le nombre de pile vaut le nombre de face. En effet, soit un résultat de E_n . Au cours des $2n$ lancers, le nombre de Pile reste toujours supérieur ou égal au nombre de Face, et il est égal au nombre de Face à la fin.

On note $2k$ le premier rang auquel le nombre de Pile devient égal au nombre de Face.

Alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les $2k$ premiers lancers forment un résultat de D_k , car avant le rang $2k$, le nombre de Pile est strictement supérieur au nombre de Face.

Les $2n - 2k$ lancers suivants forment un résultat de E_{n-k} .

Réciproquement, en concaténant un résultat de D_k et un résultat de E_{n-k} , on obtient un résultat de E_n dont le premier retour à l'égalité a lieu au rang $2k$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

- ii. D'après la question précédente : $e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k e_{n+1-k}$. Or, la question 14.a donne $d_k = e_{k-1}$.

Donc :

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1} e_{n+1-k}$$

$$\text{En posant } i = k - 1 = \sum_{i=0}^n e_i e_{n-i}.$$

- iii. Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : \quad e_n = c_n.$$

Initialisation. Par définition : $e_0 = 1$. Or : $c_0 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0), P(1), \dots, P(n)$ soient vraies.

D'après la question précédente :

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}$$

$$\text{Par hypothèse de récurrence} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

$$\text{d'après la question 7.c.} = c_{n+1}$$

- c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par symétrie (on peut commencer par un pile ou par un face), le nombre de résultat donnant $T = 2n$ est : $2d_n$. Chacun de ces résultats contient exactement n Pile et n Face, donc a pour probabilité : $p^n(1-p)^n$. Donc : $\mathbb{P}(T = 2n) = 2d_n p^n(1-p)^n$. Or : $d_n = e_{n-1} = c_{n-1}$. D'où le résultat souhaité.

15. a. Soit $x \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq \mathbb{P}(T = n)|x|^n \leq \mathbb{P}(T = n)$. Or : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) \leq 1$. Donc la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n)|x|^n$ converge. Donc la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n)x^n$ converge absolument, donc converge.
- b. On pose : $f : x \mapsto x(1 - x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$, et : $\forall x \in]0, 1[, f'(x) = 1 - 2x$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0

Ainsi, la fonction f admet un maximum sur $]0, 1[$ en $x = \frac{1}{2}$, égal à : $\frac{1}{4}$. Donc, pour tout $p \in]0, 1[: p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $p = \frac{1}{2}$, puisque f est strictement monotone sur $]0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1[$.

- c. Soit $x \in [-1, 1]$.

On pose : $q = p(1 - p)$. D'après la question précédente : $0 < q \leq \frac{1}{4}$. Donc : $qx^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \subset \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Ainsi $g(qx^2)$ est bien défini.

On a :

$$G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n$$

$$\text{car } \mathbb{P}(T = 2n + 1) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad = \quad \mathbb{P}(T = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 2n)x^{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{Question 14} &= \mathbb{P}(T = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2c_{n-1}q^n x^{2n} \\ &= \mathbb{P}(T = 0) + 2qx^2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}(qx^2)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En posant } k = n - 1 &= \mathbb{P}(T = 0) + 2qx^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(qx^2)^k \\ &= \mathbb{P}(T = 0) + g(qx^2). \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité.

- d. On sait que : $G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$. D'après la question précédente : $G_T(1) = \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1 - p))$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = 0) &= 1 - g(p(1 - p)) \\ \text{Question 8} &= 1 - \left(1 - \sqrt{1 - 4p(1 - p)}\right) \\ &= \sqrt{1 - 4p(1 - p)} \\ &= \sqrt{1 - 4p + 4p^2} \\ &= \sqrt{(2p - 1)^2} \\ &= |2p - 1|. \end{aligned}$$

Lorsque $p = \frac{1}{2}$, on obtient : $\mathbb{P}(T = 0) = 0$. Cela signifie que, lorsque la pièce est équilibrée, on obtient presque sûrement, à un certain rang, autant de Pile que de Face.

16. La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} 2n \mathbb{P}(T = 2n)$ converge. D'après la question 14 :

$$\mathbb{P}(T = 2n) = 2c_{n-1}p^n(1-p)^n.$$

On pose encore : $q = p(1-p)$. Alors : $2n \mathbb{P}(T = 2n) = 4nc_{n-1}q^n$.

a. Supposons que $p \neq \frac{1}{2}$.

Alors, d'après la question 15.b, $q < \frac{1}{4}$. Donc, $4q < 1$.

Pour $n \geq 2$, d'après la question A.6.b appliquée au rang $n-1$ et par croissance comparée pour la dernière égalité,

$$0 \leq 4nc_{n-1}q^n \leq n \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(4q)^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $1/n^2$ converge comme série de Riemann convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} 2n \mathbb{P}(T = 2n)$ converge.

On a montré que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors T admet une espérance.

b. Supposons que $p = \frac{1}{2}$. Alors : $q = p(1-p) = \frac{1}{4}$. Donc, pour tout $n \geq 1$:

$$2n \mathbb{P}(T = 2n) = 4nc_{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = nc_{n-1} \frac{1}{4^{n-1}}.$$

Pour $n \geq 2$, d'après la question A.6.b appliquée au rang $n-1$:

$$nc_{n-1} \frac{1}{4^{n-1}} \geq \frac{1}{4} \frac{n}{(n-1)\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge comme série de Riemann divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} 2n \mathbb{P}(T = 2n)$ diverge.

Donc : si $p = \frac{1}{2}$, alors T n'admet pas d'espérance.

Correction Problème EDHEC 2021 Math appliqué

Partie 1 : un jeu naïf

1. Étude de la première manche.

- (a) La variable aléatoire X_1 est égale au temps d'attente d'un premier succès : obtenir Pile, dans une suite d'épreuves de Bernoulli (les lancers de la pièce par le joueur A) répétées de façon identique et sans mémoire ; X_1 suit donc la loi géométrique de paramètre p , et comme on peut dire exactement la même chose de la variable aléatoire Y_1 qui concerne cette fois le joueur B .

$$X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_1 = k) = q^{k-1}p = \mathbb{P}(Y_1 = k)$$

On sait qu'alors il est presque sûr que le joueur A finira par obtenir Pile, donc il est aussi presque sûr que la première manche se terminera (par la victoire de A s'il obtient Pile en premier, ou par celle

de B). Cet événement est en effet $\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X_1 = k]$, union disjointe qui a pour probabilité $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p =$

$$p \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = \frac{p}{1-q} = 1.$$

- (b) L'événement E_1 s'écrit : $E_1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X_1 = k] \cap [Y_1 = k])$.

- (c) Cette union est disjointe, donc par σ -additivité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [Y_1 = k]) \\ \text{par indépendance des variables aléatoires } X_1 \text{ et } Y_1. &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(Y_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 \cdot q^{2(k-1)} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = p^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q} \end{aligned}$$

- (d) Les pièces que lancent les joueurs A et B étant identiques, les rôles des deux joueurs sont parfaitement symétriques et peuvent donc être échangés, ce qui comprend notamment le fait $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(H_1)$.

Or la première manche ne peut se terminer que de trois façons différentes : soit il y a égalité, soit le joueur A gagne à la première manche, soit le joueur B gagne à la première manche.

Bref, les événements (E_1, G_1, H_1) forment un système complet d'événements, et par conséquent :

$$\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(H_1) = 1 \iff 2\mathbb{P}(G_1) = 1 - \mathbb{P}(E_1) = 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$$

$$\text{soit : } \mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q} = \mathbb{P}(H_1).$$

2. Calcul de la probabilité de l'événement G .

- (a) Pour tout entier $n \geq 2$, l'événement G_n est réalisé si et seulement si pendant les $n-1$ premières parties, les deux joueurs sont à égalité, et à la n -ième partie, le joueur A obtient son premier Pile strictement plus tôt que le joueur B , soit :

$$G_n = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n)$$

- (b) Pour tout entier $k \geq 2$: $\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{p}{1+q}$ car on a besoin de savoir que les $k-1$ premières parties ont chacune conduit à l'égalité entre les deux joueurs A et B , pour que la k -ième partie ait lieu, mais dans ce cas cette partie supplémentaire se déroule dans les mêmes conditions que la première partie, et la probabilité qu'il y ait à nouveau égalité est encore égale à $\mathbb{P}(E_1) = \frac{p}{1+q}$.

Pour tout entier $n \geq 2$, la probabilité $\mathbb{P}(G_n)$ se calcule alors avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n) &= \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) \\ &= \underbrace{\frac{p}{1+q} \cdot \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q}}_{n-1 \text{ fois}} \times \frac{q}{1+q} \\ &= \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \cdot \frac{q}{1+q} \end{aligned}$$

En effet, on a aussi, pour des raisons analogues à celles évoquées au début de cette question :

$$\mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(G_1) = \frac{q}{1+q}.$$

- (c) Lorsque $n = 1$: $\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1} \cdot \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} = \mathbb{P}(G_1)$, donc la formule générale est aussi vraie pour $n = 1$, donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (d) L'événement G est réalisé si et seulement si l'un des événements G_n est réalisé, donc :

$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$, et l'union est disjointe puisque si A gagne à une certaine partie, il n'a pas gagné avant et les parties d'après n'auront pas lieu. Ainsi, par σ -additivité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{q}{1+q} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\ &= \frac{q}{1+q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \times \frac{1+q}{1+q-p} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (e) À nouveau, pour obtenir la probabilité $\mathbb{P}(H)$ il suffit d'échanger les rôles des joueurs A et B , qui sont parfaitement symétriques ; on écrirait notamment : $H_n = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap (Y_n < X_n)$ pour tout entier $n \geq 2$, et $H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$.

Les calculs suivent alors exactement les mêmes étapes, et : $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(G) = \frac{1}{2}$.

En définitive ce jeu n'a que trois issues possibles : soit A finit par gagner, soit c'est B qui finit par gagner, soit le jeu ne s'arrête jamais.

Les événements (G, H, E) forment donc un système complet d'événements, et par conséquent :

$$\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E) = 1 \iff \mathbb{P}(E) = 0 \quad \text{puisque} \quad \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H) = \frac{1}{2}$$

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un rang d'écart, et B parie le contraire.

3. (a) Comme l'énoncé l'indique, on utilise le système complet d'événements $((X_1 = i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ pour écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (Y_1 = X_1 + 1)) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 = i) \cap (Y_1 = i + 1)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(Y_1 = i + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1} \cdot pq^i \\ &= p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1} = p^2 q \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2 q}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{pq}{1 + q} \quad \text{puisque } 1 - q = p \end{aligned}$$

(*) par indépendance des variables aléatoires X_1 et Y_1 .

- (b) La probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart est alors :

$$u = \mathbb{P}((Y_1 = X_1 + 1) \cup (X_1 = Y_1 + 1)) = \mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) + \mathbb{P}(X_1 = Y_1 + 1) = \frac{2pq}{1+q}$$

par union disjointe, et toujours parce que les rôles de X_1 et Y_1 sont symétriques.

4. (a) L'événement K_1 est égal à $(Y_1 = X_1 + 1) \cup (X_1 = Y_1 + 1)$ donc $\mathbb{P}(K_1) = \frac{2pq}{1+q}$, et pour tout entier $n \geq 2$:

$$K_n = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap ((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1))$$

La formule des probabilités composées donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_n) &= \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \\ &\quad \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}}((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1)) \\ &= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \cdot u = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \cdot \frac{2pq}{1+q} \end{aligned}$$

et à nouveau, on remarque que la formule finale pour $\mathbb{P}(K_n)$ est aussi valable pour $n = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour finir : $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ et l'union est disjointe, donc encore par σ -additivité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \frac{2pq}{1+q} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \\ &= \frac{2pq}{1+q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q} \cdot \frac{1+q}{1+q-p} = \frac{2pq}{2q} = p\end{aligned}$$

Partie 3 : informatique

- 6) Le script complété est le suivant :

```
p = float(input('entrez une valeur pour p'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = rd.geometric(p)
    Y = rd.geometric(p)
    c = c+1
if X < Y:
    print('Le joueur A a gagné')
else:
    print('Le joueur B a gagné')
print(c)
```

En effet, les variables X et Y simulent respectivement les rangs d'obtention du premier Pile pour les joueurs A et B lors d'une manche.

Tant qu'on a $X == Y$, la manche se termine par une égalité, donc on rejoue une manche et on augmente la variable c de 1.

Lorsque la boucle s'arrête, on a nécessairement $X \neq Y$. Si $X < Y$, alors le joueur A a obtenu son premier Pile avant le joueur B , donc A gagne. Sinon, c'est le joueur B qui gagne.

- 7) La commande complétée est la suivante :

```
if np.abs(X-Y) == 1:
    print('A gagne le deuxieme jeu')
else:
    print('B gagne le deuxieme jeu')
```

En effet, à la fin du script précédent, les variables X et Y correspondent aux rangs d'obtention du premier Pile lors de la manche gagnée.

Le joueur A gagne le deuxième jeu si la manche gagnée l'est avec exactement un rang d'écart, c'est-à-dire si $|X - Y| = 1$. Dans le cas contraire, le joueur B gagne le deuxième jeu.