

ECRICOME 2021 Mathématiques appliquées

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

CONCOURS D'ADMISSION 2021 MATH APPLIQUÉES

Sujet 1

EXERCICE 1

Soit $E = M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E .

Soit A l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3. \quad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à A .

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in A$.
2. L'ensemble A est-il sous-espace vectoriel de E ?
3. On note

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer BX_1 et BX_2 .

- b) En déduire deux réels λ tel qu'il existe $X \neq 0$ tel que $BX = \lambda X$.

Pour ces deux λ , donner une base de l'espace vectoriel $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : BX = \lambda X\}$.

- c) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ tel que e_1, e_2 forment une base de E_{-2} et e_3 est une base de E_{-1} . Ecrire la matrice de B dans la base $\mathcal{B}$. On notera cette matrice D .

- d) Démontrer que $D \in A$, puis que $B \in A$.

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonale, telle que les éléments diagonaux de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

Montrer que $M \in A$.

Exercice 1 ECRICOME ECS 2018

On considère u et v deux endomorphismes de E , et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E .

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. (a) Vérifier que les endomorphismes u , v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
(b) Vérifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u \circ v(1, a) = \lambda(1, a)$.
(c) En déduire l'image et le noyau de $u \circ v$.
3. (a) Démontrer que $\lambda \in [0, 1]$.
(b) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$(u \circ v)^2 = \mu(u \circ v).$$

Calculer μ .

- (c) Pour quelle(s) valeur(s) de a , $u \circ v$ est-il un projecteur ?

EXERCICE 1 ECRICOME 2025 Math Appliqué

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = O_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{O_3} et E_{I_3} .
2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit M une matrice de E_A .
Montrer que tM appartient à E_A . *Indication : Observez A . Cette matrice n'est-elle pas un peu particulière ?*
4. (a) Soit λ un réel.
Montrer que si il existe $X = (x, y, z)$ avec $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, alors :

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0.$$

- (b) Résoudre cette équation. On notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les trois racines de ce polynôme.
 - (c) Déterminer X_1, X_2, X_3 trois vecteurs non nuls tel que $AX_i = \lambda_i X_i$, et tel que la première coordonnée de X_1 vaut 1 ; que la seconde coordonnée de X_2 vaut 1, et que la troisième coordonnée de X_3 vaille 1.
 - (d) On pose $P = (X_1, X_2, X_3)$ la matrice donc les colonnes sont formées des vecteurs trouvés ci-dessus. Calculer P^2 .
En déduire une expression de P^{-1} .
 - (e) Calculer $D = P^{-1}AP$.
- Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question 4.
5. (a) Soit

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que N appartient à E_D si et seulement si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D .
6. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
Montrer que M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D .
(b) En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{B}$.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(A + M)^2 = A^2 + M^2.$$

On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M .

8. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM + MA.$$

En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ .

EXERCICE 3 ECRICOME 2021 MATH APPLIQUÉES

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n -ième lancer »,
- P_n : « Obtenir Pile au n -ième lancer ».

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »,
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = P(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = P(X = n).$$

Partie A

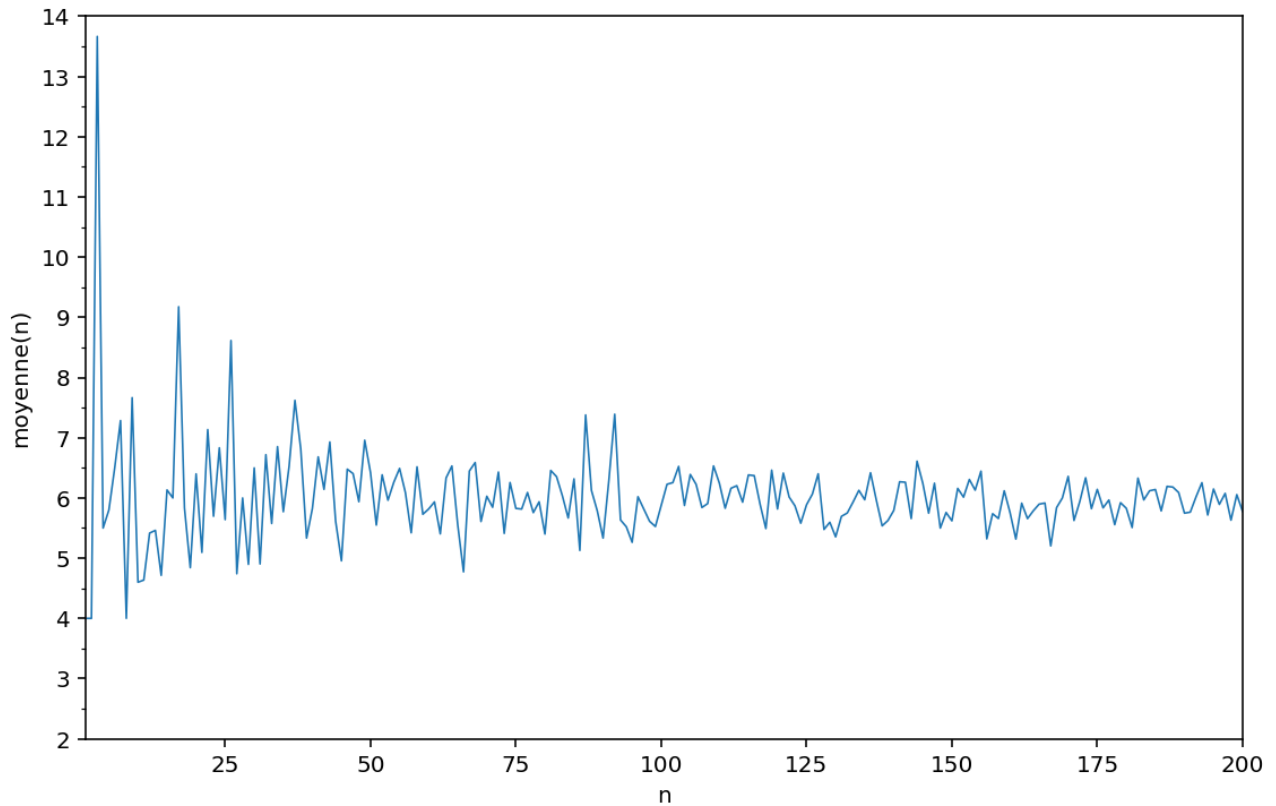
1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .
En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = \sum_{k=2}^n a_k.$$

3. a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile != .....:
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = .....
        tirs = .....
    return tirs
```

- b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def moyenne(n)` : qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
- c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $[1, 200]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

- b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

- c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
6. En déduire que :

$$P(X = -1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0.$$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k P(X = k).$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}.$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}.$$

9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

11. Montrer que X admet une espérance.

12. a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .
 b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
 À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.
 c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .