
Concours Blanc 2

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME 2 EM Lyon 2022 ECS

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k, n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé le **nombre de Catalan d'ordre n** , défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. Calculer les réels c_0 , c_1 et c_2 .

2. a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

4. Écrire une fonction Python d'en-tête `def catalan(n):`, qui, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de c_n .

5. a. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. a. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}.$$

b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}.$$

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \frac{n}{2} S_n$$

(on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n).

b. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = c_{n+1}.$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

8. a. Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = 2x f(x).$$

On admet que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

- b. Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n,$$

montrer :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}.$$

- c. En déduire :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad (g(x))^2 = 2g(x) - 4x.$$

- d. Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 + \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

- e. En déduire :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}.$$

PARTIE B : Loi du demi-cercle

Normalement, cette partie est une partie de proba. Cela dit, aucune des questions ne peut se traduire par de l'analyse, donc vous êtes en train de faire exactement le sujet, mais j'ai simplement "retiré" le vernis de proba

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in [-2; 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. a. Montrer :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

- b. En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2 \sin(t)$, la valeur de

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) dx.$$

10. Montrer que φ est positive, et vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$.

11. a. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(t) dt$ converge, et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1} \varphi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

b. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} \varphi(t) dt.$$

i. Calculer u_0 .

ii. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}).$$

iii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c_n.$$

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0; 1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1 - p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement $P-P-F-P-F-F-P-F \dots$ (où P désigne Pile et F désigne Face), alors la variable aléatoire T est égale à 6.

12. a. Écrire une fonction Python, d'en-tête `def simule(p):`, qui prend en argument le réel p , qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

b. On exécute le script Python suivant :

```
for i in range(1, 4):
    L = [0]*3
    for j in range(3):
        m = 0
        for k in range(1000):
            m = m + simule(i/4)
        L[j] = m/1000
    print(L)
```

et on obtient les résultats suivants :

1.392	1.478	1.41
100.572	71.172	125.28
1.454	1.544	1.414

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

13. Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = 2n + 1) = 0.$$

14. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours strictement supérieur au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$d_n = \text{Card}(D_n).$$

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours supérieur ou égal au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose $e_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$e_n = \text{Card}(E_n).$$

Par exemple,

$$D_3 = \{ P-P-P-F-F-F, P-P-F-P-F-F \}$$

et

$$E_3 = \{ \text{P-F-P-F-P-F}, \text{P-F-P-P-F-F}, \text{P-P-F-F-P-F}, \text{P-P-F-P-F-F}, \text{P-P-P-F-F-F} \};$$

ainsi $d_3 = 3$ et $e_3 = 5$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier :

$$d_n = e_{n-1}.$$

- b. i. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

- ii. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}.$$

- iii. Montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = c_n$$

où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n .

- c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T = 2n) = 2 c_{n-1} p^n (1-p)^n.$$

15. a. Montrer que, pour tout x de $[-1; 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n) x^n$ converge.
On pose, pour tout x de $[-1; 1]$:

$$G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) x^n.$$

- b. Montrer :

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \left(p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2} \right).$$

- c. Montrer :

$$\forall x \in [-1; 1], \quad G_T(x) = \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1-p)x^2),$$

où g est la fonction définie dans la question A.8.

- d. En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer :

$$\mathbb{P}(T = 0) = |2p - 1|.$$

Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

16. En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :

- a. si $p \neq \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.
b. si $p = \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

Problème EDHEC 2021 Math Appliqué

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p , élément de $]0; 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la k -ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la k -ième manche ».

On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n -ième manche ».

1) Étude de la première manche.

- Donner la loi commune à X_1 et Y_1 . En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.
- Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1 .
- Montrer que

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(Y_1 = i)$$

et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q .

- Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q .

2) Calcul de la probabilité de l'événement G

- Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $(X_n < Y_n)$.
- Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2, P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q} \right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

- Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.
- Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que :

$$P(G) = \frac{1}{2}.$$

- Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $P(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

- 3) a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer que

$$P(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{pq}{1+q}.$$

- En déduire la probabilité μ que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.
- 4) a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la n -ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.
- 5) Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à Python (avec `import numpy.random as rd`) de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

- 6) Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = float(input('entrez une valeur pour p'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = -----
    Y = -----
    c = -----
if X < Y:
    -----
else:
    -----
print(c)
```

- 7) Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée à la fin du script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur ?

```
if -----:
    print('A gagne le deuxieme jeu')
else:
    -----
```