
Concours Blanc 1

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 2 ECRICOME MATH APPLIQUÉES 2021

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer que :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t).$$

- b) Démontrer que :

$$\forall y \in]0, 1], \quad \int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y).$$

En déduire que l'intégrale

$$\int_0^1 \ln(t) dt$$

converge et déterminer sa valeur.

- c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. a) Calculer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right).$$

- b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t).$$

- b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale

$$\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$$

converge et vaut

$$\frac{1}{(n+1)^2}.$$

- c) Déduire des questions précédentes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1.$$

5. a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq \ln(x) \leq x.$$

En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}.$$

- b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}.$$

- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Python.

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du.$$

7. On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.exponential(1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose

$$Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}.$$

On admet que $E(Y_n) = J_n$.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m , et qui renvoie un `array` de longueur m dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de Y_n :

```
def simulY(n, m):
    Y = np.zeros(...)
    for i in range(...):
        X = rd.exponential(1)
        Y[i] = .....
    return Y
```

8. a) Énoncer la loi faible des grands nombres.
b) On tape en Python le script suivant :

```
n = int(input('Entrer la valeur de n'))
print(np.mean(simulY(n, 1000)))
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

EXERCICE 2 ECRICOME APPLIQUE 2025

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

est convergente.

On note pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

(b) Calculer I_0 et I_1 .

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.
4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$.
Montrer que $F(y) \leq F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?
5. (a) Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt.$$

On distinguera le cas $x = 0$ et le cas $x > 0$

- (b) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt.$$

- (c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$$

- (d) À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$$

est convergente.

- (a) Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt.$$

- (b) En déduire que :

$$0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2.$$

7. (a) En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x).$$

- (b) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F . On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.

Corrigé

Exercice 3 ECRICOME APPLIQUE 2022

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 , et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \dots$

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n , Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Justifier que X_n , Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
 - (c) Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.
 - (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.
 - (e) En déduire que :

$$P(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n , puis démontrer que $P(V) = 0$.
3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.
 - (a) On rappelle qu'en Python, si l'on a importé `numpy.random as rd`, l'instruction `rd.randint(a,b+1)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T .

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X, Y, Z]
    while .....:
        i = rd.randint(1, 4)      # choix d'un nombre entier entre 1 et 3
        liste[i-1] = .....
        n = n + 1
    t = .....
    return t
```

- (b) Écrire un script Python qui simule 10000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).
4. Déterminer $T(\Omega)$.
5. Démontrer que :

$$\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7.
 - (a) Donner la loi du couple (X_2, W_2) .
 - (b) En déduire la loi de W_2 , et calculer son espérance.
 - (c) Calculer la covariance de X_2 et W_2 .
 - (d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?
8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Déterminer $W_n(\Omega)$.

9. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

(a) Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad E(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

(c) Exprimer alors $E(W_n)$ en fonction de n .

10. Démontrer que :

$$P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, quelle est la valeur de

$$P((X_n = k) \cap (W_n = 2)) ?$$

11. Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}.$$

Que vaut

$$P((X_n = n) \cap (W_n = 1)) ?$$

12. Démontrer que :

$$E(X_n W_n) = 2n P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) + \sum_{k=1}^{n-1} k P((X_n = k) \cap (W_n = 1)).$$

13. Montrer alors que

$$E(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

puis calculer la covariance de X_n et W_n .

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

Corrigé

Corrigé Exercice 2 ECRICOME math appliqué 2021

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose, sous réserve de convergence : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$, $J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ et $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$.

Partie A

Dans cette partie, on fixe $n \geq 2$.

1. (a) Le fait évident que $\lim_{t \rightarrow 0} 1+t^n = 1$ permet d'écrire : $1+t^n \sim_{t \rightarrow 0} 1 \implies \frac{\ln(t)}{1+t^n} \sim_{t \rightarrow 0} \ln(t)$ par compatibilité de l'équivalence avec le quotient.
- (b) Une primitive classique de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ est connue, il s'agit de la fonction $t \mapsto t \ln(t) - t$, qui permet d'écrire directement, pour tout $y \in]0; 1]$:

$$\int_y^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_y^1 = \ln(1) - 1 - (y \ln(y) - y) = -1 + y - y \ln(y)$$

Si on veut vraiment redémontrer le résultat sans utiliser directement cette primitive (notamment si on ne s'en rappelle pas...), on procède par intégration par parties, en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & \longrightarrow \quad u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & \longrightarrow \quad v(t) = t \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0; 1]$, donc par intégration par parties : $\int_y^1 \ln(t) dt = [t \ln(t)]_y^1 - \int_y^1 1 dt = \ln(1) - y \ln(y) - (1 - y) = -1 + y - y \ln(y)$

Le résultat de croissances comparées en 0 : $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(y) = 0$ permet alors d'écrire : $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \ln(t) dt = \lim_{y \rightarrow 0} -1 + y - y \ln(y) = -1$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$, impropre en 0, converge et vaut : $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$. Et il est normal de trouver un résultat négatif, puisque $\ln$ est négative sur $]0; 1]$.

- (c) Attention à la rédaction ici ! Sur $]0; 1]$, les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^n}$ sont continues et de signe négatif ; on a vu que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge, donc $\int_0^1 -\ln(t) dt$ aussi : par comparaison d'intégrales de fonctions continues et positives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1+t^n} dt$ converge.

On en déduit que $J_n = -\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1+t^n} dt$, est elle-même une intégrale impropre convergente.

Il fallait prendre soigneusement garde au signe des fonctions ici : le théorème de comparaison exige de travailler avec des fonctions continues et positives sur l'intervalle considéré !

2. (a) En se souvenant que $n \geq 2$, on écrit : $t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \sim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} \cdot \frac{\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}$.

Le fait que $n \geq 2$ implique que $n - \frac{3}{2} > 0$, et les croissances comparées au voisinage de $+\infty$ s'appliquent : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right) = 0$.

- (b) Le résultat suivant signifie que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$, les deux fonctions ainsi comparées étant positives et continues sur $[1; +\infty[$.

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ est convergente, comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives, assure alors que l'intégrale $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est elle-même convergente.

3. Les deux intégrales J_n et K_n étant convergentes : par définition même de la convergence d'une intégrale doublement impropre (en 0 et en $+\infty$) et en cohérence avec la relation de Chasles, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n + K_n$, est donc convergente.

Partie B

4. (a) Pour tout entier $n \geq 2$, et tout réel $t \in]0; 1]$: $\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) = \frac{\ln(t) - (1+t^n)\ln(t)}{1+t^n} = \frac{-t^n \ln(t)}{1+t^n}$, où : $1+t^n \geq 1$ puisque $t > 0$, donc $\frac{1}{1+t^n} \leq 1$ par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t \in]0; 1]$, $\ln(t) \leq 0$ donc $-t^n \ln(t) \geq 0$: si donc on multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par cette quantité positive, on obtient bien $0 \leq \frac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t) \iff 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$
- (b) Dans le même esprit qu'à la question 1., on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\int_y^1 -t^n \ln(t) dt$ pour $y \in]0; 1]$, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) &\longrightarrow & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) &= -t^n &\longrightarrow & v(t) = -\frac{t^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0; 1]$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_y^1 -t^n \ln(t) dt &= \left[-\frac{t^{n+1} \ln(t)}{n+1} \right]_y^1 + \frac{1}{n+1} \int_y^1 t^n dt \\ &= 0 + \frac{y^{n+1} \ln(y)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_y^1 \\ &= \frac{y^{n+1} \ln(y)}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Or $\lim_{y \rightarrow 0} y^{n+1} = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} y^{n+1} \ln(y) = 0$ par croissances comparées, donc : $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 -t^n \ln(t) dt = \frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

- (c) L'inégalité obtenue en 4.a) concerne des fonctions continues et positives sur $]0; 1]$; la convergence de l'intégrale impropre obtenue en 4.b) et les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale ($0 < 1$) assure que :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \right) dt &\leq \int_0^1 -t^n \ln(t) dt \iff 0 \leq J_n - \int_0^1 \ln(t) dt \leq \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\iff 0 \leq J_n + 1 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, alors le théorème d'encadrement assure que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n + 1 = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$

5. (a) Les propriétés de la fonction $\ln$ assurent que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$.

On sait aussi que la fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$, donc sa courbe est sous sa tangente au point d'abscisse 1, qui a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) \iff y = x-1$, ce qui donne : $\forall x \geq 1$, $\ln(x) \leq x-1 \leq x$, donc : $\forall x \geq 1$, $0 \leq \ln(x) \leq x$.

Puisque pour tout $x \geq 1$ et pour tout entier $n \geq 3$, $1+x^n \geq x^n > 0$, alors : $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n}$ par stricte décroissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit membre à membre de cette inégalité avec la précédente, toutes les deux étant de même sens et concernant des réels tous positifs : $\forall x \geq 1$, $\forall n \geq 3$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{x^n} \iff 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$

- (b) Comme $n \geq 3$, alors $n-1 \geq 2$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente.

Elle vaut d'ailleurs : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(n-2)x^{n-2}} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(n-2)A^{n-2}} + \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-2}$.

On a déjà vu que l'intégrale K_n est convergente : on peut donc à nouveau utiliser les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale sur $[1; +\infty[$, les fonctions concernées étant continues et positives sur cet intervalle. On obtient ainsi : $\forall n \geq 3, \quad 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^n} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx \iff 0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$

- (c) Le théorème d'encadrement donne évidemment : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n + K_n = -1 + 0 = -1$.

Partie C

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0; 1]$.

Le changement de variable $u = -\ln(t)$ est bien de classe C^1 sur $]0; 1]$.

— élément différentiel : $du = -\frac{1}{t} dt$.

— corps de l'intégrale : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \frac{-t \ln(t)}{1+t^n} \cdot \left(-\frac{1}{t} dt \right) = \frac{e^{-u} \cdot u}{1+(e^{-u})^n} du = \frac{ue^{-u}}{1+e^{-nu}} du$.

— bornes : quand $t = y$, $u = -\ln(y)$ et quand $t = 1$, $u = 0$.

Ainsi par changement de variable : $\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{ue^{-u}}{1+e^{-nu}} du = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du$.

7. Dans le script ci-dessous, il suffit d'appliquer m fois de suite la fonction $x \mapsto \frac{-x}{1+e^{-nx}}$ à chaque simulation de X , pour obtenir autant de simulations de Y_n indépendantes.

```
def simuly(n, m):
    Y = np.zeros(m)
    for i in range(m):
        X = rd.exponential(1)
        Y[i] = -X/(1+np.exp(-n*X))
    return Y
```

En effet, l'instruction `rd.exponential(1)` simule une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On a ensuite, par définition de Y_n : $Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}$.

8. a) Question de cours : soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, de même espérance μ et de même variance. Alors la moyenne empirique $\overline{Z_m} = \frac{Z_1 + \dots + Z_m}{m}$ converge en probabilité vers μ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} P(|\overline{Z_m} - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

- b) Le script suivant :

```
n = int(input('Entrer la valeur de n'))
print(np.mean(simuly(n, 1000)))
```

demande à l'utilisateur une valeur de n , puis simule 1000 réalisations indépendantes de la variable aléatoire Y_n grâce à la fonction `simuly`.

L'instruction `np.mean(simuly(n, 1000))` calcule ensuite la moyenne empirique de ces 1000 simulations.

D'après la loi faible des grands nombres, cette moyenne empirique est probablement proche de l'espérance de Y_n . Puisque (c'est admis) $E(Y_n) = J_n$, le script permet d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n .

Corrigé Exercice 2 ECRICOME math appliqué 2025

Exercice 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.

De surcroît : $t^n e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ (immédiat car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$ par croissances comparées). De plus, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$, elle est donc convergente.

Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente. Puisque $\int_0^1 t^n e^{-t} dt$ n'est pas impropre (intégrande continue sur le segment d'intégration), on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

- (b) — Soit $M > 0$. $\int_0^M e^{-t} dt = 1 - e^{-M} \rightarrow 1$. Conclusion : $I_0 = 1$.

— Pour I_1 , on fait une IPP. On pose $u : t \mapsto t$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$, donc $v : t \mapsto -e^{-t}$.

Les fonctions u et v sont dans $\mathcal{C}^1([0, M])$. Par intégration par parties, et par croissance comparée à la dernière égalité,

$$I_1 = \int_0^M t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_0^M - \int_0^M (-e^{-t}) dt = -M e^{-M} - e^{-M} + 1 \rightarrow 1$$

Conclusion : $I_1 = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a : $xt \geq 0$ D'où : $1 + xt \geq 1$

Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, licite car 1 et $1 + xt$ sont dans $]0; +\infty[$: $\frac{1}{1 + xt} \leq 1$

Et donc, puisque $e^{-t} \geq 0$: $\frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq e^{-t}$ On a ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq e^{-t}$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale convergente (question 1.a).

Par critère de comparaison (par inégalité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt$ est convergente.

Conclusion : pour tout réel x positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt$ est convergente.

3. $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ par la question 1.b.

4. Puisque $x \leq y$, on a, en multipliant par $t \geq 0$: $\forall t \in [0; +\infty[, xt \leq yt$

Et, en procédant comme en question 2 : $\forall t \in [0; +\infty[, \frac{e^{-t}}{1 + xt} \geq \frac{e^{-t}}{1 + yt}$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leq +\infty$ et que les intégrales en jeu sont convergentes (question 2), on obtient : $F(x) \geq F(y)$. On en déduit que la fonction F est décroissante sur $[0; +\infty[$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

— Si $x = 0$: $\int_0^1 1 dt = 1$

— Si $x > 0$: $\int_0^1 \frac{1}{1 + xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{x}{1 + xt} dt = \frac{1}{x} [\ln(|1 + xt|)]_0^1 = \frac{\ln(1 + x)}{x}$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 \frac{1}{1 + xt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a : $\forall t \in [0; 1], 0 \leq e^{-t} \leq 1$

D'où, puisque, pour tout $t \in [0; 1], 1 + xt > 0$: $0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq \frac{1}{1 + xt}$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $0 \leq 1$ et que les intégrandes en jeu sont continues sur le segment $[0; 1]$: $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$

- (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall t \in [1; +\infty[, 1 \leq t$. D'où, puisque $x > 0 : \forall t \in [1; +\infty[, x \leq xt$.
Et ainsi : $\forall t \in [1; +\infty[, 0 < x \leq 1+x \leq 1+xt$. Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[: \forall t \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$.

Puis, comme l'exponentielle est positive : $\forall t \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}$

Et enfin, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \leq +\infty$ et que les intégrales en jeu sont convergentes (questions 1.a et 2) : $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt$

- (d) D'après la relation de Chasles : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$

Ainsi, les deux questions précédentes donnent $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq F(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt + \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$

Mais :

$$\text{— D'après la question 5.a, pour tout } x > 0 : \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x(1+\frac{1}{x}))}{x} = \frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, et par limites usuelles : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 0$

D'où, par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = 0$

— Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}$ est une constante indépendante de x , on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt) \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1+xt} - \frac{1-(xt)^2}{1+xt} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{x^2 t^2}{1+xt} dt \\ &= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad F(x) - I_0 + xI_1 = F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + x \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$$

Or :

— la fonction $t \mapsto \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}$ est positive sur $[0; +\infty[$, donc, par croissance de l'intégrale, licite car

$$0 \leq +\infty, \text{ et puisque } x^2 \geq 0, \text{ on obtient : } x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \geq 0$$

— en procédant comme en question 2 : $\forall t \in [0; +\infty[, \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}$, ce qui permet d'obtenir

$$x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \leq x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = x^2 I_2$$

Conclusion : $0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$.

7. (a) D'après la question précédente et la question 1.b, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq F(x) - 1 + x \leq x^2 I_2$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \frac{F(x) - 1 + x}{x} \leq xI_2$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} xI_2 = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 1 + x}{x} = 0$.

Par conséquent : $F(x) - 1 + x = o(x)$

- (b) Puisque la fonction F admet un développement limité d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $F'(0)$ vaut le coefficient en facteur du terme de degré 1 dans ce développement limité. Donc, F est dérivable en 0 et $F'(0) = -1$.

8. Informations à faire figurer :

✓ $F(0) = 0$

✓ F est décroissante sur $[0; +\infty[$

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

✓ $F'(0) = -1$

✓ F est continue sur $[0; +\infty[$

Corrigé Exercice 3 ECRICOME math appliqué 2022

Exercice 3

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) En se plaçant du point de vue de l'urne 1 : chaque placement de jeton dans une des trois urnes peut être vu comme une épreuve de Bernoulli où le succès correspond au fait de placer le jeton dans l'urne 1.

On répète cette épreuve n fois de suite de façon identique et indépendante par rapport aux autres épreuves, et X_n compte le nombre de succès - lequel est de probabilité $\frac{1}{3}$ - obtenus en n épreuves.

On en conclut donc que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Des considérations en tout point analogues permettent d'affirmer que Y_n et Z_n suivent la même loi que X_n .

- (b) La formule générale de la loi binomiale : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, donne en particulier : $\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, et $\mathbb{P}(X_n = n) = \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- (c) L'événement $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ signifie qu'après n jetons placés, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun : c'est donc qu'ils sont tous allés dans l'urne 1, et on a bien l'égalité d'événements : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.

- (d) L'événement V_n est réalisé si et seulement si, après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide, donc si et seulement si au moins un des trois événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ ou $[Z_n = 0]$ est réalisé : $V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$.

- (e) L'union est non-disjointe, donc $\mathbb{P}(V_n)$ se calcule avec la formule du crible :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n) &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\ &\quad - \mathbb{P}([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}(Z_n = n) - \mathbb{P}(Y_n = n) - \mathbb{P}(X_n = n) + 0 \\ &= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n,\end{aligned}$$

il est en effet impossible qu'après n jetons placés, les trois urnes soient encore toutes vides !

2. L'événement V est réalisé si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement V_n est toujours réalisé, ce qui

conduit donc à écrire : $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$.

Or si l'une des trois urnes est encore vide après $n+1$ jetons placés, elle était déjà vide après n jetons seulement : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_{n+1} implique V_n , donc $V_{n+1} \subset V_n$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion.

La propriété de limite monotone pour les probabilités s'applique donc, qui assure que :

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 - 0 = 0,$$

puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$.

Il est donc quasi-impossible que l'une des trois urnes reste vide indéfiniment.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

- (a) La fonction Python complétée est la suivante :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def T():
    X = 0
    Y = 0
```

```

Z = 0
n = 0
liste = [X, Y, Z]
while min(liste) == 0:
    i = rd.randint(1, 4) # choix d'un nombre entier entre 1 et 3
    liste[i-1] = liste[i-1] + 1
    n = n + 1
t = n
return t

```

Cette fonction simule l'expérience aléatoire étudiée : la variable `liste` est une liste dont les trois éléments représentent le nombre de jetons placés dans chacune des trois urnes.

La variable `i` prend une valeur choisie au hasard parmi les trois entiers 1,2,3 : cela correspond au numéro de l'urne dans laquelle on place le nouveau jeton.

Comme Python numérote les indices d'une liste à partir de 0, il faut augmenter de 1 l'élément `liste[i-1]`.

La condition de poursuite de la boucle `while` est bien que l'une au moins des trois urnes soit encore vide, ce qui se traduit par :

`min(liste) = 0`.

En effet, tant qu'une urne est vide, le plus petit des trois nombres contenus dans `liste` vaut 0. Lorsque la boucle s'arrête, les trois urnes contiennent donc au moins un jeton, et la variable `n` contient exactement le nombre de jetons nécessaires. La fonction renvoie ainsi la valeur prise par T .

(b) Le script Python demandé est le suivant :

```

S = 0
for i in range(10000):
    S = S + T()
print(S/10000)

```

Ce script appelle 10000 fois la fonction précédente et ajoute la valeur obtenue à chaque nouvelle simulation, à une variable `S` qui représente in fine la somme des valeurs prises par T sur 10000 simulations de l'expérience.

En divisant par 10000, on obtient la moyenne empirique de T , qui constitue une valeur approchée de l'espérance $E(T)$, en supposant bien sûr que cette espérance existe.

4. Il faut bien sûr placer au moins 3 jetons différents pour avoir une chance que chacune des 3 urnes contienne au moins un jeton ; le nombre de placement peut être envisagé aussi grand qu'on veut puisqu'on peut imaginer que les jetons ne vont que dans deux des trois urnes (ou même tous dans la même urne) aussi longtemps qu'on veut. On a vu par contre qu'il était presque impossible de ne jamais parvenir à terminer les placements selon la règle du jeu, donc : $T(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \rrbracket$.
5. Soit donc $n \geq 3$: l'événement $[T = n]$ est réalisé si et seulement si après n placement, plus aucune urne n'est vide, alors qu'après $(n-1)$ placements seulement, au moins une des trois urnes (et en fait exactement une) était encore vide, donc : $[T = n] = V_{n-1} \cap \overline{V_n}$ ou $V_{n-1} \setminus V_n$.

Le passage à la probabilité donne alors :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_{n-1} \cap V_n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n),$$

puisque l'on a vu à la question 2. que $V_n \subset V_{n-1}$, et donc que $V_{n-1} \cap V_n = V_n$.

6. Le calcul explicite donne, à l'aide de la formule précédente et du résultat de la question 1.e) : pour tout entier $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T = n) &= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 &= \left(3 - 3 \times \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(-3 + 3 \times \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

La variable aléatoire discrète T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 3} k \mathbb{P}(T = k)$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence simple suffit.

Pour tout entier $n \geq 3$: $\sum_{k=3}^n k \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=3}^n k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \sum_{k=3}^n k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

On reconnaît deux séries géométriques dérivées, convergentes puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$: la série de départ est convergente, et T admet donc une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \sum_{k=3}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \sum_{k=3}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + 2 + \frac{4}{3} \\ &= 9 - 1 - 2 \cdot \frac{9}{4} + 2 = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

On retrouve bien une espérance théorique $\mathbb{E}(T) = \frac{11}{2} = 5,5$.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

(a) Après avoir placé deux jetons, il peut rester une ou deux urnes encore vide : $W_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

Comme $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, on remplit le tableau de la loi conjointe suivant :

$X_2 \backslash W_2$	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

Justification des calculs :

- $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1])$ est la probabilité que les urnes 2 et 3 aient reçu chacune un jeton (on fait 2 placements en tout) : soit le 1er jeton est allé dans l'urne 2 puis le 2ème est allé dans l'urne 3, soit le contraire, donc par indépendance des placements : $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
- $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2])$ est la probabilité que les 2 premiers jetons aient tous deux été placés dans l'urne 2, ou tous deux dans l'urne 3 : $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.
- $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1])$ est la probabilité que l'un des deux premiers jetons soit mis dans l'urne 1, l'autre étant mis dans l'urne 2 ou dans l'urne 3 ; avec deux ordres possibles, on a cette fois $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) = 2 \times 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.
- $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) = 0$: il est impossible que l'urne 1 contienne 1 jeton seulement et que deux urnes restent vides après 2 placements.
- $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) = 0$: si l'urne 1 a reçu les deux jetons, il y a deux urnes vides et non pas une seule après 2 placements.
- $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$: c'est la probabilité que les deux jetons aient été placés dans l'urne 1.

(b) La loi marginale de W_2 se déduit de la loi conjointe, cela correspond à l'utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X_2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_2 = 1) &= \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + 0 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_2 = 2) &= \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]) + \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) + \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) \\ &= \frac{2}{9} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

La variable aléatoire finie W_2 admet une espérance qui vaut : $\mathbb{E}(W_2) = 1 \cdot \mathbb{P}(W_2 = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(W_2 = 2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(c) Le tableau de la loi conjointe permet de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2 W_2) &= \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^2 k j \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [W_2 = j]) \\ &= 0 + 0 + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9},\end{aligned}$$

donc d'après la formule de Koenig-Huygens : $\text{Cov}(X_2, W_2) = \mathbb{E}(X_2 W_2) - \mathbb{E}(X_2) \mathbb{E}(W_2) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0$.

(d) Les zéros dans le tableau de la loi conjointe fournissent des contre-exemples simples pour prouver que X_2 et W_2 ne sont pas indépendantes (bien que non-corrélées d'après la question précédente) : on sait par exemple que $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_2 = 1) \times \mathbb{P}(W_2 = 2) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \neq 0$.

8. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Après n placements, une urne au moins a reçu des jetons, et on a donc au maximum deux urnes vides (cas où les n jetons sont tous allés dans la même urne) ; on peut avoir encore une urne vide, ou aucune urne vide, soit : $W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

9. Pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après n placements, et qui vaut 0 sinon.

(a) La variable aléatoire $W_{n,i}$ est donc une variable de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité $\mathbb{P}(W_{n,i} = 1)$ que l'urne i soit encore vide après n placements : cela signifie que chacun des n premiers jetons a été placé dans une des deux autres urnes de l'expérience. Comme les placements sont indépendants : $\mathbb{P}(W_{n,i} = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, qui est aussi la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(W_{n,i})$ de cette variable de Bernoulli.

(b) Il est clair que $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$: chaque urne encore vide après n placements contribue d'une unité au nombre total d'urnes vides, et n'augmente pas ce nombre sinon.

(c) Par linéarité de l'espérance, on a donc : $\mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W_{n,1}) + \mathbb{E}(W_{n,2}) + \mathbb{E}(W_{n,3}) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

10. L'événement $[X_n = n] \cap [W_n = 2]$ signifie que les n premiers jetons ont été placés dans l'urne 1, et qu'après n placements deux urnes restent vides : le premier événement implique le second, donc : $\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ comme on l'a vu à la question 1.b).

Par contre, si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 2]$ est impossible : cela signifierait qu'une partie seulement, ni vide ni totale, des jetons a été placée dans l'urne 1 et que pour autant les deux autres urnes sont vides. Ainsi : $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = 0$.

11. Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$: l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ signifie que l'urne 1 a reçu k jetons, et une des deux autres urnes a reçu les $n-k$ autres jetons.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k jetons qui vont aller dans l'urne 1, les autres allant forcément tous dans la même autre urne. Il y a ensuite 2 façons différentes de choisir celle des deux autres urnes 2 ou 3 qui va recevoir tous les $(n-k)$ jetons restants. Par équiprobabilité et indépendance des choix de placements des n jetons, il y a 3^n répartitions possibles a priori, donc on a bien : $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}$.

L'événement $[X_n = n] \cap [W_n = 1]$ est impossible : il signifierait que les n premiers jetons ont tous été placés dans l'urne 1, il y a donc 2 urnes encore vides après n placements, et non pas une seule. Ainsi, $\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) = 0$.

12. Par définition de la covariance du couple (X_n, W_n) , bien définie car les deux variables aléatoires sont

finies :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n W_n) &= \sum_{(k,j) \in (X_n, W_n)(\Omega)} k j \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = j]) \\
&= \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^n k j \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = j]) \\
&= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + \sum_{k=0}^n 2k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + 2n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2])
\end{aligned}$$

en tenant compte des termes nuls, comme on l'a remarqué dans les questions précédentes.

13. On peut alors terminer les calculs grâce aux formules obtenues aux questions 10. et 11. :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n W_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n} + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{2}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} n \binom{n-1}{k-1} + \frac{2n}{3^n} \quad \text{d'après la formule sans nom} \\
&= \frac{2n}{3^n} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} + \frac{2n}{3^n} \quad \text{changement d'indice } i = k-1 \\
&= \frac{2n}{3^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \quad \text{car } \binom{n-1}{n-1} = 1 \\
&= \frac{2n}{3^n} \times 2^{n-1} = n \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton avec } a = b = 1
\end{aligned}$$

La covariance du couple (X_n, W_n) est alors donnée par la formule de Koenig-Huygens : $\text{Cov}(X_n, W_n) = \mathbb{E}(X_n W_n) - \mathbb{E}(X_n) \mathbb{E}(W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

14. Comme à la question 7.c), on obtient une covariance nulle : les variables aléatoires X_n et W_n sont non corrélées, tout en n'étant pas indépendantes pour autant.