
Concours Blanc 2

Exercice 3 EDHEC 2020 Math Approfondie

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E . Pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f , le réel, noté $\text{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe quelle des matrices représentant f . On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

- 1) On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
 - a) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$
 - b) Établir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$
 - c) Soit $B_1 = (e_1, \dots, e_k)$ une base de $\text{Ker}(p)$ et $B_2 = (f_1, \dots, f_m)$ une base de $\text{Ker}(\text{Id} - p)$, démontrer que $B = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_m)$ est une base de E
 - d) Ecrire la matrice de p dans la base B . En déduire que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.
- 2) Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E , notés $p_1, p_2, \dots, p_k$, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

- 3) Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

- 4)
 - a) Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
 - b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
 - c) Établir finalement l'égalité :

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

- 5)
 - a) Montrer que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
 - b) En déduire que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $\forall x \in E, \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k p_l(p_j(x)) = 0$.
 - c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.
- 6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Corrigé

Exercice 1 EDHEC 2020 Math appliqué

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $M_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
(b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Dans toute la suite, on étudie le cas } n = 3 \text{ et on choisit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On considère les trois matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
- (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.
- (b) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{Id}$.

Corrigé

Exercice 1 EDHEC 2019 appliqué

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I .

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
- (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
2. On pose $A = N + I$.
- (a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N , puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
- (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. (a) Soit X un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$. Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur possible de λ .
4. On pose $u_1 = (f - \text{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
- (a) Montrer que le rang de $f - \text{Id}$ est égal à 1.
- (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
5. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
6. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Justifier l'inversibilité de P . On admettra pour la question 7.b. que $A = PTP^{-1}$

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui vaut 1.
- (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille

$$(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}).$$

Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

- (b) Soit N une matrice quelconque de $M_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

8. En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Corrigé

Exercice 1 EDHEC ECS 2015

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}.$$

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0 , on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$

- (b) En déduire la valeur de I_1 .
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

- (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n .
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}.$$

- (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
- (b) Calculer J_0 .
6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k .
(b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$$

en fonction de J_n .

- (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

- (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. À l'aide des questions 4.a) et 6.a), compléter les instructions Python suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n , pour une valeur de n , supérieure ou égale à 2 , entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np

n = int(input("entrez une valeur de n superieure ou egale a 2 : "))
I = np.log(2)
J = 1/2
J = .....
for k in range(2, n + 1):
    I = .....
    J = .....
print("la valeur de I est :", I)
print("la valeur de J est :", J)
```

Corrigé

Corrigé Exercice 3 EDHEC 2020 Math approfondie

1. (a) Soit x un élément de $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$.

Il existe t élément de E tel que $x = p(t)$ et $p(x) = 0$. On en déduit, puisque p est un projecteur, que $p(x) = p(p(t)) = p(t) = x = 0$.

On a donc : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$.

Comme $\dim \text{Ker}(p) + \dim \text{Im}(p) = \dim(E)$ par le théorème du rang, on conclut :

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p).$$

- (b) — Soit x élément de $\text{Ker}(\text{Id}_E - p)$. On a alors $x = p(x)$, ce qui prouve que x appartient à $\text{Im}(p)$.
On a donc

$$\text{Ker}(\text{Id}_E - p) \subset \text{Im}(p).$$

— Soit x un élément de $\text{Im}(p)$, il existe u élément de E tel que $x = p(u)$.

En appliquant p , on obtient : $p(x) = x$, ce qui prouve que x appartient à $\text{Ker}(\text{Id}_E - p)$. On a donc :

$$\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(\text{Id}_E - p).$$

Par double inclusion :

$$\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id}_E - p).$$

- (c) On a donc $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(\text{Id} - p)$. Par propriété des sous espaces supplémentaires, la concaténation d'une base de $\text{Ker}(p)$ et d'une base de $\text{Ker}(\text{Id} - p)$ forme une base de E .
- (d) Pour $i \leq k$, on a $p(e_i) = 0$. Pour $1 \leq i \leq m$, on a $p(f_i) = f_i$. La matrice est donc une matrice diagonale composée de k zéros et de m uns :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sa trace vaut donc m , qui est égal à son rang (ça se lit sur la matrice, qui a m colonnes libres, et le reste est nul) On a donc : $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(D) = \text{rg}(p)$.

2. On procède par récurrence.

— Pour $k = 1$, on a bien $\dim(E_1) \leq \dim(E_1)$.

— Si l'on suppose, pour un entier k fixé supérieur ou égal à 1, que $\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$, alors, d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) = \dim(E_1 + \dots + E_k) + \dim(E_{k+1}) - \dim((E_1 + \dots + E_k) \cap E_{k+1})$$

$$\text{Par hypothèse de récurrence} \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k) + \dim(E_{k+1})$$

Partie 2

3. On calcule : $q_k^2 = q_k \circ q_k = \sum_{i=1}^k p_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} p_i \circ p_j$.

Pour $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0$ et on sait que $p_i^2 = p_i$ donc il reste : $q_k^2 = q_k$.

On a bien montré que q_k est un projecteur.

4. (a) $\forall y \in \text{Im}(q_k)$, $\exists x \in E$, $y = q_k(x) = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_k(x)$. Ceci montre que y appartient à $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$, et ainsi : $\text{Im}(q_k) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
- (b) — Pour compléter ce qui précède, on a, par linéarité de la trace :

$$\text{Tr}(q_k) = \text{Tr}(p_1) + \text{Tr}(p_2) + \dots + \text{Tr}(p_k).$$

D'après la question 1), ceci s'écrit : $\text{rg}(q_k) = \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2) + \dots + \text{rg}(p_k)$. En utilisant la question 2), on obtient : $\text{rg}(q_k) \geq \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$.

— D'après 4a), la dimension de $\text{Im}(q_k)$ est inférieure ou égale à celle de $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$ et d'après le point précédent, elle est supérieure à la dimension de $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$ donc ces deux dimensions sont égales.

Pour résumer, on a

$$\begin{cases} \text{Im}(q_k) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k) \\ \text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)) \end{cases}$$

ce qui prouve, par inclusion et égalité des dimensions, que : $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.

(c) Pour finir, l'égalité $\text{rg}(q_k) = \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2) + \dots + \text{rg}(p_k)$, obtenue plus haut peut s'écrire

$$\dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)) = \dim \text{Im}(p_1) + \dots + \dim \text{Im}(p_k).$$

Ceci prouve que la somme $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$ est directe

Bilan : $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$

5. (a) Comme $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$, alors, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'inclusion $\text{Im}(p_j) \subset \text{Im}(q_k)$, donc, pour tout x de E , $p_j(x)$ appartient à $\text{Im}(q_k)$, qui est égal à $\text{Ker}(q_k - \text{Id})$, et ainsi :

$$\forall x \in E, \quad q_k(p_j(x)) = p_j(x).$$

On a donc : $q_k \circ p_j = p_j$.

- (b) Par définition de q_k , on a : $q_k \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i \circ p_j = p_j^2 + \sum_{i \neq j} p_i \circ p_j$. D'après la question 6a), on a $q_k \circ p_j = p_j$ donc il reste : $\sum_{i \neq j} p_i \circ p_j = 0$. En appliquant ceci à un vecteur x quelconque de E , on obtient :

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i \neq j} p_i(p_j(x)) = 0.$$

(c) L'égalité précédente peut s'écrire :

$$p_1(p_j(x)) + \dots + p_{j-1}(p_j(x)) + \underbrace{p_j(p_j(x)) - p_j(p_j(x))}_{\text{vecteur nul}} + p_{j+1}(p_j(x)) + \dots + p_k(p_j(x)) = 0$$

La somme $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$ est directe donc, par unicité de l'écriture du vecteur nul, on a :

$$\forall x \in E, \quad p_1(p_j(x)) = \dots = p_{j-1}(p_j(x)) = p_{j+1}(p_j(x)) = \dots = p_k(p_j(x)) = 0.$$

Ainsi, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0$.

6. q_k est un projecteur si, et seulement si, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0$.

Corrigé Exercice 1 EDHEC 2020 Math appliqué

Exercice 1

- Montrons que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$:
 - $A_n(\mathbb{R})$ n'est pas un ensemble vide : la matrice carrée nulle d'ordre n , est égale à sa transposée et à son opposée : ${}^t0_n = 0_n = -0_n$, donc $0_n \in A_n(\mathbb{R})$.
 - Soient M et N deux matrices antisymétriques éléments de $M_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda.M + N) &= \lambda.{}^tM + {}^tN && \text{linéarité de la transposée} \\ &= -\lambda.M - N && \text{puisque } M \text{ et } N \text{ appartiennent à } A_n(\mathbb{R}) \\ &= -(\lambda.M + N) \end{aligned}$$

donc $\lambda.M + N$ appartient encore à $A_n(\mathbb{R})$.

On a bien montré que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

- (a) Soit M une matrice de $A_n(\mathbb{R})$: calculons la transposée de $f(M)$.

$$\begin{aligned} {}^t(f(M)) &= {}^t(({}^tA)M + MA) \\ &= {}^t(({}^tA)M) + {}^t(MA) && \text{par linéarité de la transposée} \\ &= {}^tM {}^t({}^tA) + {}^tA {}^tM && \text{transposée d'un produit : attention à l'ordre des facteurs!} \\ &= -MA - {}^tAM = -({}^tAM + MA) = -f(M) && \text{puisque } M \in A_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^t({}^tA) = A \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que pour toute matrice M de $A_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ appartient encore à $A_n(\mathbb{R})$.

- (b) Montrons que f est une application linéaire ; pour toutes matrices M et N de $M_n(\mathbb{R})$, et pour tous réel λ :

$$f(\lambda.M + N) = {}^tA(\lambda.M + N) + (\lambda.M + N)A = \lambda.({}^tAM + MA) + ({}^tAN + NA) = \lambda.f(M) + f(N)$$

Ainsi f est bien linéaire, et au vu du résultat de la question précédente, c'est bien un endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$.

- On considère les trois matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Il faut ici revenir à la forme générale connue des matrices antisymétriques d'ordre 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix},$$

et en cas de besoin on la retrouve selon le principe d'identification des coefficients :

Pour une matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad {}^tM = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

et :

$${}^tM = -M \iff \begin{cases} a = -a \implies a = 0 \\ b = -d \\ c = -g \\ e = -e \implies e = 0 \\ f = -h \\ i = -i \implies i = 0 \end{cases}$$

On peut donc écrire toute matrice M de $A_3(\mathbb{R})$ sous la forme :

$$M = a. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = a.J + b.K + c.L$$

où a, b, c sont trois réels quelconques, donc $B = (J, K, L)$ est bien une famille génératrice de $A_3(\mathbb{R})$.

- (b) Pour vérifier que B est libre, on considère trois réels a, b, c tels que :

$$a.J + b.K + c.L = 0_3 \iff \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \iff a = b = c = 0$$

La famille B est donc bien libre, et comme elle engendre $A_3(\mathbb{R})$, c'est une base de cet espace et $\dim A_3(\mathbb{R}) = 3$.

4. (a) Par définition les trois images demandées s'obtiennent par calcul matriciel, avec

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

$$f(J) = {}^tAJ + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(K) = {}^tAK + KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque donc que :

$$f(J) = -J - L = -1.J + 0.K - 1.L, \quad f(K) = 0.J + 0.K + 0.L, \quad f(L) = -L = 0.J + 0.K - 1.L$$

- (b) Par propriété du cours, puisque B est une base de $A_3(\mathbb{R})$:

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) = \text{Vect}(-J - L, 0_3, -L) = \text{Vect}(J + L, L) = \text{Vect}(J, L)$$

On a utilisé ici le fait que la matrice nulle peut toujours être éliminée d'une famille génératrice, et qu'en multipliant les éléments de la famille par (-1) , puis en soustrayant un des vecteurs à un autre, la famille ainsi transformée est encore génératrice de $A_3(\mathbb{R})$.

- (c) On vient de voir que (J, L) est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$: c'est aussi une famille libre puisque c'est une sous-famille de la base B , donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Le théorème du rang donne alors : $\dim \text{Ker}(f) = \dim A_3(\mathbb{R}) - \dim \text{Im}(f) = 3 - 2 = 1$

Il suffit donc, pour trouver une base de $\text{Ker}(f)$, de trouver un vecteur non nulle qui lui appartienne.

Or on vient de voir que $f(K) = 0_3$, avec $K \neq 0_3$, donc (K) est une base de $\text{Ker}(f)$.

5. (a) Les calculs faits en 4.a) permettent de donner directement la matrice F de f dans la base B :

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (b) On note Id l'endomorphisme identité de $A_3(\mathbb{R})$: l'endomorphisme $f + \text{Id}$ est représenté dans la base B par la matrice

$$F + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et le rang de $f + \text{Id}$ est celui de la matrice $F + I_3$. Ce rang est égal à 2, c'est la dimension de l'espace engendré par les trois colonnes de $F + I_3$: la troisième est nulle, et les deux premières sont non colinéaires.

Corrigé Exercice 1 EDHEC 2019 Math appliqué

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I .

1. (a) $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} (A - I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 - 2 + 1 & -1 + 2 - 1 & -1 + 2 - 1 \\ 2 - 4 + 2 & -2 + 4 - 2 & -2 + 4 - 2 \\ -1 + 2 - 1 & 1 - 2 + 1 & 1 - 2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) La relation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} (A - I)^2 = 0_3 &\iff A^2 - 2A + I = 0_3 \\ &\iff I = 2A - A^2 \\ &\iff I = A(2I - A) \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure que A est inversible, d'inverse : $A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On pose $A = N + I$.

(a) Il est évident que les matrices N et I commutent ($NI = IN = N$), donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= (N + I)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k. \end{aligned}$$

Or : $N = A - I$ donc $N^2 = (A - I)^2 = 0_3$ (matrice nulle) d'après ce qui a été vu en 1.a). On en déduit que dans la somme précédente, les termes d'indices $k \geq 2$ sont tous nuls, et il reste seulement les termes pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \\ &= I + n.N \end{aligned}$$

Remarquons que pour utiliser le principe précédemment décrit, il faut a priori avoir pris $n \geq 1$, mais la formule finale $A^n = I + n.N$ est aussi vraie pour $n = 0$.

On en déduit la formule générale :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= I + n.(A - I) \\ &= n.A - (n - 1).I \end{aligned}$$

(b) Lorsque $n = -1$, le membre de droite de la relation précédente devient : $-A + 2I$, qui est bien la valeur de A^{-1} .

3. (a) Si $AX = \lambda X$, alors, puisque $(A - I)^2(X) = 0$, on obtient $A^2X - 2AX + X = 0 \iff A(\lambda X) - 2\lambda X + X = 0 \iff (\lambda^2 - 2\lambda + 1)X = 0$. Or, $X \neq 0$, donc $(\lambda - 1)^2 = 0$, soit $\lambda = 1$.

4. On pose $u_1 = (f - Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

- (a) Le rang de l'endomorphisme $f - Id$ est égal à celui de sa matrice représentative dans la base B , qui est $A - I$. Comme on l'a dit, ses trois lignes (et ses trois colonnes aussi, en fait) sont proportionnelles et non nulles, ce qui garantit que : $rg(A - I) = 1 = rg(f - Id)$.
- (b) Le théorème du rang s'applique à l'endomorphisme $f - Id$ pour donner :

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(f - Id) + rg(f - Id) &= \dim \mathbb{R}^3 \\ \iff \dim \text{Ker}(f - Id) &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

De plus : $(f - Id)(u_1) = (f - Id)^2(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $(A - I)^2 = 0_3$, donc $u_1 \in \text{Ker}(f - Id)$.
Par ailleurs, d'après la matrice représentative de f dans la base canonique :

$$\begin{aligned} (f - Id)(u_2) &= f(e_1 + e_3) - (e_1 + e_3) \\ &= -2e_2 + e_3 + e_1 + 2e_2 - e_1 - e_3 \\ &= 0_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

donc $u_2 = e_1 + e_3$ appartient également à $\text{Ker}(f - Id)$. La famille (u_1, u_2) est ainsi constituée de deux vecteurs non colinéaires de $\text{Ker}(f - Id)$: il s'agit donc d'une famille libre de deux vecteurs d'un espace dont on sait qu'il est de dimension 2, ce qui suffit pour pouvoir affirmer que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - Id)$.

5. (a) La famille (u_1, u_2, e_1) est une famille de trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : il suffit de prouver qu'elle est libre pour que ce soit une base de cet espace vectoriel.
Pour cela, considérons trois réels a, b, c tels que :

$$a.u_1 + b.u_2 + c.e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -a + b + c &= 0 \\ -2a &= 0 \\ a + b &= 0 \end{cases}$$

Il est évident que ce système possède une unique solution, on obtient successivement : $a = 0$ (L2), qui implique $b = 0$ (L3), et enfin $c = 0$ (L1).

La famille (u_1, u_2, e_1) est donc bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (b) Puisque le vecteur u_1 appartient à $\text{Ker}(f - Id)$, il vérifie : $f(u_1) - u_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff f(u_1) = u_1$. De même, $f(u_2) = u_2$.

Il reste à se rappeler que, par définition : $u_1 = (f - Id)(e_1) \iff f(e_1) = u_1 + e_1$, et ainsi : $T =$

$$\text{Mat}_{(u_1, u_2, e_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. La matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est en fait celle de la famille (u_1, u_2, e_1) écrite dans la base (e_1, e_2, e_3) : P

est donc la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la nouvelle base (u_1, u_2, e_1) .

À ce titre, P est inversible.

7. On appelle $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ les neuf matrices élémentaires qui forment la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$.

(a) On cherche ici toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ qui commutent avec T , c'est-à-dire qui vérifient :

$$\begin{aligned}
MT = TM &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a = a+g \\ b = b+h \\ a+c = c+i \\ d = d \\ e = e \\ d+f = f \\ g = g \\ h = h \\ g+i = i \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients} \\
&\iff \begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ a = i \\ d = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \text{en éliminant les équations toujours vraies}
\end{aligned}$$

L'ensemble des matrices M qui commutent avec T est donc :

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, e, f) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\
&= \{ a.(E_{1,1} + E_{3,3}) + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3} \mid (a, b, c, e, f) \in \mathbb{R}^5 \}
\end{aligned}$$

La famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ apparaît donc bien comme une famille génératrice de E ; elle est assez clairement libre aussi, en effet :

$$\begin{aligned}
a.(E_{1,1} + E_{3,3}) + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3} = 0_3 &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\iff a = b = c = e = f = 0.
\end{aligned}$$

La famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est donc bien une base de E , qui est donc de dimension 5.

(b) Soit N une matrice quelconque de $M_3(\mathbb{R})$; d'après les relations qui existent entre A , P et T :

$$\begin{aligned}
NA = AN &\iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \\
&\iff P^{-1}NPTP^{-1}P = P^{-1}PTP^{-1}NP \\
&\iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)
\end{aligned}$$

8. Le résultat précédent signifie qu'une matrice N commute avec A si et seulement si la matrice $M = P^{-1}NP$ commute avec T : c'est donc le cas, d'après 7.a), si et seulement s'il existe 5 réels (a, b, c, e, f) tels que :

$$\begin{aligned}
P^{-1}NP &= a.(E_{1,1} + E_{3,3}) + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3} \\
&\iff N = P(a.(E_{1,1} + E_{3,3}) + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3})P^{-1} \\
&\iff N = a.P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + b.PE_{1,2}P^{-1} + c.PE_{1,3}P^{-1} + e.PE_{2,2}P^{-1} + f.PE_{2,3}P^{-1}
\end{aligned}$$

On a bien prouvé ce faisant, que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$. (Et il serait facile de prouver que cette famille est aussi libre, ce qui en fait une base de F , mais ce n'était pas demandé).

Corrigé Exercice 1 EDHEC 2015 Math approfondie

Exercice 1

- 1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, on a $\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+1}}$ et comme $n+1 \geq 2 > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}$ converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure : I_n est une intégrale convergente

- 2) a) On a les équivalences suivantes (valables pour tout x différent de -1 et 0) :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1) - bx}{x(x+1)} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a-b)x + a}{x(x+1)}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, on obtient :

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

En conclusion, on trouve $a = b = 1$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

- b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^A = \ln A - \ln(A+1) + \ln 2.$$

Pour terminer, $\lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln(A+1)) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{A}{A+1} \right) = 0$ d'où, après passage à la limite :

$$I_1 = \ln 2$$

- 3) a) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $x+1 \geq 2$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $[2, +\infty[$, on obtient : $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$. Comme tout est positif, on peut écrire $0 \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$, et en multipliant par $\frac{1}{x^n} \geq 0$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}.$$

Il reste à intégrer de 1 à A , avec $A \geq 1$ (bornes dans l'ordre croissant) et on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} dx &\leq \frac{1}{2} \int_1^A \frac{1}{x^n} dx \iff 0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} dx \leq \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^A \\ &\iff 0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n(x+1)} dx \leq \frac{1}{2(n-1)} \left(1 - \frac{1}{A^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$, on a $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{n-1}} = 0$ et, après passage à la limite : $\forall n \geq 2, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

- b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n-1)} = 0$, on obtient par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

- 4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)}$. Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx$$

On a déjà vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx$ était convergente et de plus, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{nx^n} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{A^n} \right) = \frac{1}{n}.$$

Finalement : $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} dx$$

Comme $x \geq 1$, on a $\frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leq 0$, et ainsi $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction négative donc : $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Conclusion : La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

c) Grâce à la décroissance de la suite (I_n) , on a $I_n \geq I_{n+1}$ d'où l'on tire $2I_n \geq I_n + I_{n+1}$, et comme, avec la question 4a), on sait que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$, on en déduit : $I_n \geq \frac{1}{2n}$.

D'après la question 3b), on sait que $I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ et en regroupant ces deux dernières inégalités, on trouve :

$$\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

En multipliant par $2n > 0$, on trouve : $1 \leq 2nI_n \leq \frac{n}{n-1}$. Par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nI_n = 1$,

ce qui signifie : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

La série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente donc, grâce au critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut conclure : La série de terme général I_n diverge

5) a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, on a $\frac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}$ et comme $n+2 \geq 2 > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+2}}$ converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure : J_n est une intégrale convergente

b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{x+1} \right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A+1} = 0$, on a, après passage à la limite : $J_0 = \frac{1}{2}$

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{k-1}(x+1)^2}$. Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)} dx.$$

On a donc :

$$\boxed{J_k + J_{k-1} = I_k}$$

b) De l'égalité précédente, on tire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (J_k + J_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_{k-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i J_i$$

En écrivant $(-1)^i = -(-1)^{i-1}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} J_i.$$

Par télescopage, on trouve : $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + J_0$. Comme $J_0 = \frac{1}{2}$, on a finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}}$$

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $x + 1 \geq 2$ donc $(x + 1)^2 \geq 4$, par stricte positivité de $(x + 1)^2$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $0 \leq \frac{1}{(x + 1)^2} \leq \frac{1}{4}$.

En multipliant par $\frac{1}{x^n} \geq 0$, on trouve : $0 \leq \frac{1}{x^n(x + 1)^2} \leq \frac{1}{4x^n}$.

Le calcul est le même qu'à la question 3a) où l'on a montré que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1}$.

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n-1)} = 0$, on en déduit, par encadrement : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$

d) D'après la question 6b), on a : $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}$.

On en déduit : $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k - \frac{1}{2} \right| = |(-1)^{n-1} J_n| = J_n$, car J_n est positif.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k - \frac{1}{2} \right| = 0$, ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2}$$

Ceci signifie que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et sa somme est : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2}}$

1. À l'aide des questions 4.a) et 6.a), compléter les instructions Python suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n , pour une valeur de n , supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np

n = int(input("entrez une valeur de n superieure ou egale a 2 : "))
I = np.log(2)
J = 1/2
J = I - J
for k in range(2, n + 1):
    I = 1/(k - 1) - I
    J = I - J
print("la valeur de I est :", I)
print("la valeur de J est :", J)
```

Pour la quatrième ligne, on a utilisé le fait que $J_1 = I_1 - J_0$. Pour la sixième et septième ligne, on a utilisé le fait que $I_k = \frac{1}{k-1} - I_{k-1}$ et que $J_k = I_k - J_{k-1}$.