
Concours Blanc 1

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 2 ECRICOME MATH APPLIQUÉES 2021

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. a) Démontrer que :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t).$$

- b) Démontrer que :

$$\forall y \in]0, 1], \quad \int_y^1 \ln(t) dt = -1 + y - y \ln(y).$$

En déduire que l'intégrale

$$\int_0^1 \ln(t) dt$$

converge et déterminer sa valeur.

- c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. a) Calculer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right).$$

- b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n .

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t).$$

- b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'intégrale

$$\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$$

converge et vaut

$$\frac{1}{(n+1)^2}.$$

- c) Déduire des questions précédentes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1.$$

5. a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq \ln(x) \leq x.$$

En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}.$$

- b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}.$$

- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Python.

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du.$$

7. On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.exponential(1)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose

$$Y_n = \frac{-X}{1+e^{-nX}}.$$

On admet que $E(Y_n) = J_n$.

Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m , et qui renvoie un `array` de longueur m dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de Y_n :

```
def simulY(n, m):  
    Y = np.zeros(...)  
    for i in range(...):  
        X = rd.exponential(1)  
        Y[i] = .....  
    return Y
```

8. a) Énoncer la loi faible des grands nombres.
b) On tape en Python le script suivant :

```
n = int(input('Entrer la valeur de n'))  
print(np.mean(simulY(n, 1000)))
```

Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 ECRICOME APPLIQUE 2025

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

est convergente.

On note pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

(b) Calculer I_0 et I_1 .

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$.
Montrer que $F(y) \leq F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?
5. (a) Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt.$$

On distinguera le cas $x = 0$ et le cas $x > 0$

- (b) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt.$$

- (c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$$

- (d) À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$$

est convergente.

- (a) Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt.$$

- (b) En déduire que :

$$0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2.$$

7. (a) En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) = \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x).$$

- (b) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F . On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 3 ECRICOME APPLIQUE 2022

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 , et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n , Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Justifier que X_n , Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
 - (c) Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.

(d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.

(e) En déduire que :

$$P(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».

Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n , puis démontrer que $P(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

(a) On rappelle qu'en Python, si l'on a importé `numpy.random as rd`, l'instruction `rd.randint(a,b+1)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.

Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T .

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X, Y, Z]
    while .....:
        i = rd.randint(1, 4)      # choix d'un nombre entier entre 1 et 3
        liste[i-1] = .....
        n = n + 1
    t = .....
    return t
```

(b) Écrire un script Python qui simule 10000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$.

5. Démontrer que :

$$\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. (a) Donner la loi du couple (X_2, W_2) .

(b) En déduire la loi de W_2 , et calculer son espérance.

(c) Calculer la covariance de X_2 et W_2 .

(d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Déterminer $W_n(\Omega)$.

9. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

(a) Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad E(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

(c) Exprimer alors $E(W_n)$ en fonction de n .

10. Démontrer que :

$$P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, quelle est la valeur de

$$P((X_n = k) \cap (W_n = 2)) ?$$

11. Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}.$$

Que vaut

$$P((X_n = n) \cap (W_n = 1)) ?$$

12. Démontrer que :

$$E(X_n W_n) = 2n P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) + \sum_{k=1}^{n-1} k P((X_n = k) \cap (W_n = 1)).$$

13. Montrer alors que

$$E(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

puis calculer la covariance de X_n et W_n .

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.