Colle 11 : système linéaire et polynômes

Semaine du 5 janvier 2026 (Bonne année à tous !)

Déroulement de la colle :

- Une question de cours sur les systèmes linéaires (voir détail ci-dessous).
- Une question de cours sur les polynômes (voir détail ci-dessous).
- *(Exercice imposé Chapitre 08 Systèmes linéaires)*
  Exercice : résoudre un système linéaire donné par le colleur avec au moins 3 inconnues et 3 équations et dont l'ensemble des solutions est infini.

  Contraintes de méthode et de rédaction :
  - Utiliser obligatoirement la méthode du pivot de Gauss
  - A chaque étape, indiquer les pivots choisis et les opérations faites sur les lignes.
  - Ecrire l'ensemble des solutions sous forme ensembliste, par exemple : $S = \{(x, 2x, 3x+1),\ x \in \mathbb{R}\}$.
    (Pour les colleurs, la notation $Vect$ n'a pas encore été vue)

- *(Exercice imposé chapitre 09 Polynômes)*
  Exercice : trouver toutes les racines d'un polynôme de degré 3 ou 4 donné par le colleur.

  Indications :
  - exercice du même type que l'exercice du chapitre 9 page 6 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 - 6x^2 - 26x + 30 = 0$.
  - Aucune indication ne sera donnée mais il y aura forcément au moins une racine évidente et il faudra prendre l'initiative de la chercher
- Exercices divers sur les deux chapitres.

Questions de cours sur les systèmes linéaires :

- Sur un exemple, passer d'un système linéaire à trois équations et trois inconnues à une équation matricielle $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont des "matrices ne contenant que des nombres" et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est la matrice colonne qui "contient les inconnues" du système linéaire.
- Résolution de l'équation matricielle $AX = B$ dans le cas où A est une matrice carrée (proposition page 6 du cours)

Questions de cours sur les polynômes :

- Définition d'un polynôme (pour les colleurs on identifie "polynôme" et "fonction polynômiale") et de son degré.
  Notations :
  - $\mathbb{R}[x]$ ou $\mathbb{R}[X]$ pour l'ensemble des polynômes et
  - $\mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$ pour l'ensemble des polynômes de degré INFERIEUR ou EGAL à n.
- Egalité de deux polynômes (propriété en haut de la page 2) : deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients devant les "mêmes puissances de x" sont égaux.
- Définition de la racine d'un polynôme. Caractérisation :
  α est racine d'un polynôme $P \iff \Big(P(x) = (x-\alpha) \times Q(x)$ où Q est un polynôme de degré : $deg(P) - 1 \Big)$
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Programme : les chapitres 8 et 9 en entier

- Chapitre 8 : systèmes linéaires et matrices
  Pour les colleurs : Tout le chapitre sauf la dernière page : sur le calcul de l'inverse d'une matrice avec la méthode de Gauss (et la matrice identité). Contrairement à l'année dernière, je ne l'ai pas fait dans ce chapitre, je le ferai plus tard dans un chapitre de complément sur les matrices où on parlera du rang d'une matrice.
- Chapitre 9 : Polynômes
  - Définition d'un polynôme, vocabulaire : degré, coefficient, notation $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$.
  - Degré d'un produit de polynômes, le degré d'une somme de deux polynômes est inférieur au maximum des deux degrés.
  - Egalité de deux polynômes ("identification")

- Racine d'un polynôme, Factorisation d'un polynôme par $(x - \alpha)$ si α est une racine de ce polynôme.
- Cas particulier des trinômes du second degré (seulement dans le cas réel) : factorisation et lien entre les coefficients et la somme et le produit des racines.
- Factorisation en pratique, méthode au choix : "identification" et résolution d'un système, "de tête" ou division euclidienne de polynôme.
- Un polynôme de degré n à coefficients réels admet au plus n racines.