

Programme 17 : découverte des séries (début)

Semaine du lundi 9 mars 2026

Attention ! Nous avons seulement fait les pages 2 et 3 du cours sur les séries. Ce programme de colle est donc une transition entre les suites et les séries.

Une question de cours sur les limites de suites (chapitre 12) :

- Définition de 2 suites adjacentes. Propriété : si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.
- Donner les 4 formes indéterminées et les valeurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ en fonction des valeurs prises par q .
- Enoncé du théorème des gendarmes. Enoncé du théorème de la fusée et du sous-marin avec illustration graphique.
- (seulement sur proposition de l'étudiants car cela a été vu seulement avec le groupe de TD d'approfondissement). Soit (u_n) une suite.

$$(u_n) \text{ converge} \iff (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ convergent}$$

Illustration graphique. Pas de démonstration.

Une question de cours sur les sommes finies usuelles à connaître par coeur et écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier n et renvoie en sortie la valeur de cette somme :

- $\sum_{n=0}^N q^n$ pour $q \in \mathbb{R}$ (bien distinguer les cas $q = 1$ et $q \neq 1$).
- $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$ et $\sum_{n=1}^N 1 = N$ et $\sum_{n=0}^N 1 = N+1$
- $\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ et $\sum_{n=1}^N 1 = N$ et $\sum_{n=0}^N 1 = N+1$

Programme détaillé : chapitre 12 en entier sur les limites de suite et Chapitre 15 Les séries :seulement les 2 premières pages

- Exemples de limites $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sur des exemples simples calculables à la main (géométrique, constante, somme des entiers, entiers au carré...)
- Conjecture avec Python du comportement de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- Définition d'une série convergente et de la somme d'une série convergente.
- **Premières définitions**

— Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réelle. Définition de la somme partielle $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

Définition de la convergence de la série $\sum u_n$: la série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ est convergente

et dans ce cas, on appelle "somme de la série" la limite (finie) de la suite (S_N) et on la note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarques pour les colleurs :

Bien respecter le programme donné, notamment nous n'avons pas encore vu les séries usuelles ni aucune propriété théorique sur les séries...

Idées d'exercices :

- Démontrer la convergence ou divergence des séries usuelles que nous ferons dans la semaine (série géométrique, divergence de la série harmonique avec indications)
- Donner donc un exercice qui démontre la convergence d'une série "à la main" en travaillant sur la somme partielle avec toutes les indications nécessaires. Outils : théorème de la limite monotone, suite adjacentes, travail sur les sommes avec décomposition en éléments simples (donner la forme) puis télescopage.

N'hésitez pas si vous avez des questions !