

Programme 19 : Les séries (fin)

Semaine du lundi 23 mars 2026

Une question de cours sur les séries :

- Définition d'une série convergente et d'une série divergente.
Définition d'une série ABSOLUMENT convergente.
Propriété (admise) : l'absolue convergence implique la convergence.
La réciproque est fausse comme le montre le contre exemple $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est divergente (démontré en TD) mais n'est pas absolument convergente.
- Nature de la série géométrique et valeur de la somme en cas de convergence (avec démonstration).
- Nature des séries usuelles et valeur de la somme (sans démonstration) : la série géométrique, (pas encore les deux séries "dérivées" de la série géométrique), la série exponentielle, la série harmonique.
- Enoncé et démonstration de la proposition : " Si une série $\sum u_n$ est convergente alors la suite (u_n) converge vers 0".
La réciproque est fausse (contre-exemple : la série harmonique)
- Enoncé de la propriété de comparaison pour les séries positives (inégalité). (*théorème auquel nous avons donné le nom : théorème de la serre*)

Programme détaillé : Chapitre 14 Les séries en entier

• Premières définitions et propriétés

— Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réelle. Définition de la somme partielle $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

Définition de la convergence de la série $\sum u_n$: la série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ est convergente et dans ce cas, on appelle "somme de la série" la limite (finie) de la suite (S_N) et on la note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

— Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Attention ! La réciproque est fausse comme le montre le fait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (admis dans le cours, fait en exercice avec indication).

— (**pas encore cette semaine !**) La suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

• Séries de références :

— la série géométrique $\sum q^n$: elle converge si et seulement si $q \in]-1, 1[$ et en cas de convergence, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

— (**Pas encore cette semaine**) : les séries "dérivée" de la série géométrique : $\sum nq^{n-1}$: elle converge si et seulement si $q \in]-1, 1[$ et en cas de convergence, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

— La série exponentielle (admis)

— La série harmonique diverge.

• Opérations sur les séries :

La nature de la série ne change pas si on ajoute ou enlève un nombre fini de termes.

Soient λ un réel non nul et (u_n) une suite de réels.

— La série $\sum u_n$ converge $\iff$ la série $\sum (\lambda u_n)$ converge.

En cas de convergence, les sommes vérifient ...

— $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent $\Rightarrow \sum (u_n + v_n)$ converge et en cas de convergence les sommes vérifient...

- $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum (u_n + v_n)$ diverge .
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors ...
- Si $\sum (u_n + v_n)$ converge alors on ne peut rien dire sur la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- **Séries à termes tous positifs :**

- Une série à terme général positif est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Séries positives, inégalité
- Absolue convergence.

Remarques pour les colleurs :

On n'a pas encore travaillé sur les intégrales, merci de ne pas en faire apparaître dans les exercices pour l'instant.

Bien respecter le programme d'ECG1, Les points suivants sont notamment hors programme :

- Les séries de Riemann ne sont pas encore des séries usuelles (mais évidemment on les étudie en exercice, $\sum \frac{1}{n^2}$ déjà vu en TD)
- Pas de comparaison avec négligeabilité ou équivalence, ni de comparaison série-intégrale généralisées (ECG2)
- Pas de D'Alembert,

N'hésitez pas si vous avez des questions !