

DM 02 - Inégalités, récurrence, fonction

A rendre pour le lundi 21 septembre 2026

Indications : Traiter au choix :

- les exercices 0, 1 et 2 (questions 1 et 2) et éventuellement une partie des questions (*)
- les exercices 1 et 2 et obligatoirement les questions (*)

Exercice 0. Une inéquation.

Résoudre soigneusement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - x^3} \leq 0$.

Exercice 1. Une récurrence pour calculer une somme.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note S_n la somme $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n$.

Par exemple $S_2 = 1 \times 2 = 2$ et $S_4 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 2 + 6 + 12 = 20$.

1. Calculer S_3 et S_5 .
2. Vérifier que : $\forall n \in \llbracket 2, 5 \rrbracket, S_n = \frac{n^3 - n}{3}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n = (n-1) \times n \times (n+1)$.
4. Démontrer grâce à une démonstration par récurrence que : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, S_n = \frac{(n-1) \times n \times (n+1)}{3}$.

Exercice 2. Puissance 4.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^4$.

1. Monotonie de la fonction f (sans la dérivée !)

- (a) Rappeler la définition d'une fonction strictement croissante sur un intervalle I .
- (b) En utilisant obligatoirement la question 1a (et pas la dérivée), démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- (c) Déterminer la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^-$ (toujours en utilisant la question 1a et pas la dérivée.)
- (d) Dresser le tableau de variations de la fonction f (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$).

2. Courbe de la fonction "puissance 4" et première bissectrice

- (a) Résoudre l'inéquation $x^4 \leq x$ sur $\mathbb{R}$.
- (b) En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la première bissectrice qui est la droite d'équation $y = x$.
- (c) Tracer soigneusement sur le même graphique la courbe de la fonction f et la première bissectrice.

3. (*) Ajout de la courbe de la fonction cube

On considère en plus la fonction $g : x \mapsto x^3$.

- (a) Déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- (b) Déterminer la position relative de courbe $\mathcal{C}_g$ et de la première bissectrice.
- (c) Ajouter soigneusement la courbe de la fonction g sur la représentation graphique de la question 2(c).
(On admet que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$).

Exercice 3. (*)

1. Soit a un réel strictement positif fixé. Montrer par une démonstration par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+a)^n \geq 1+na$$

2. Expliquer pourquoi on a le droit de "poser" $a = 1/n$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^n \geq 2 n^n$$

3. En utilisant une démonstration par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^n \geq 2^n n!$$

Indication : dans l'hérédité, utiliser la question 2.