Stage "Prépa à la Prépa"

Samedi 10 mai 2025 - Mme Dellinger

Sommaire

I - Calculer ...

1) ... avec des nombres

Exercice 1. Calculer ou démontrer les égalités :

$$\left(\left(2^1\right)^2\right)^3 \qquad \left(\left(\left((-1)^1\right)^2\right)^3\right)^4 \qquad \frac{3}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}=2 \qquad 3^{-1}-\frac{2+1}{\dfrac{3}{2}}+\frac{2}{3}=-1$$

2) ... avec des nombres et des lettres

Exercice 2.

1. Démontrer les égalités :

$$\frac{x(x+x^2)}{x+1}=x^2 \qquad \frac{1-t^2}{(1-t)^2}=1+\frac{2t}{1-t} \qquad \frac{\dfrac{2t}{\frac{4}{3}}}{\frac{t}{6}}=9 \qquad \frac{t+\dfrac{\left(t\sqrt{t}\right)^2}{t}+\dfrac{1-t^2}{1-t}}{1+t}=1+t$$

2. Simplifier les expressions pour les mettre sous la forme demandée :

$$2^n+2^n=2^{\cdots} \qquad 3^n+3^n=\ldots\times 3^{\cdots} \qquad 1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{\ldots}{(x-1)^2} \qquad \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}=\ldots\left(1-\frac{1}{\ldots}\right)$$

3. Simplifier au maximum les expressions : $\dfrac{(1+t)^2-(1-t)^2}{4}$ $\quad 1+t-\dfrac{1}{1+t}$ $\quad \dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

3) ... avec des nombres, des lettres et les fonction $\ln$ et $\exp$

Exercice 3.

1. Démontrer les égalités : $\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\qquad \dfrac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{\ln(a)+\ln(b)}=\dfrac{1}{2}$

2. Simplifier les expressions pour les mettre sous la forme demandée :

$$\ln\left(x^2-1\right)-\ln(x-1)=\ln(\ldots) \qquad \left(1-\frac{1}{e^{2t}}\right)\frac{e^t}{1+e^t}=1-\ldots \qquad \frac{e^t+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{1+\ldots}{1-\ldots}$$

II - Raisonner ...

1) ... sur les liens logiques dans la vie courante

Exercice 4. "Mais où est donc Ornicar ?"

Vérifier que vous maîtriser le sens des conjonctions de coordination : cela vous sera très utile pour raisonner et aussi rédiger !

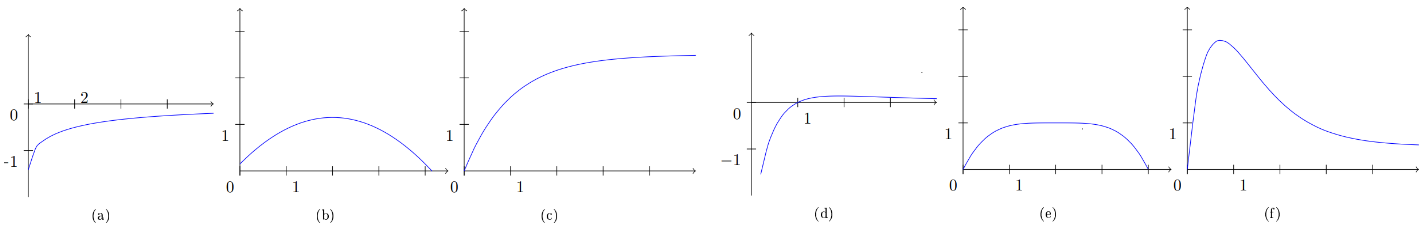
Quelques exemples sur internet :
https://www.espacefrancais.com/quiz/divers/conjonctions-de-coordination/exercice.html (quizz "littéraire" en ligne)

https://www.projet-voltaire.fr/dossier-voltaire/conjonctions-de-coordination/ (deux exercices en bas de la page)

2) ... sur des notions de mathématiques

Exercice 5. Quelle représentation graphique pour quelle fonction ?

1. Apparier les descriptions de fonctions ci-dessous avec la représentation graphique correspondante, en justifiant votre choix :
   A. La trajectoire d'un javelot lors d'une épreuve d'athlétisme (les distances sont exprimées en décamètres)
   B. Le nombre de téléchargements par jour (en dizaines de milliers) de la dernière appli en vogue au cours du temps (graduations par dizaines de jours)
   C. Le nombre total de vues (en millions) de la dernière vidéo de Squeezie au cours du temps (en dizaines de jours)
   D. $h : x \mapsto \left(1 - \dfrac{(x-2)^4}{16}\right)$
   E. $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$
   F. $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}$



2. Utiliser les représentations graphiques pour répondre aux questions :
   (a) Donner une valeur approchée à la dizaine de mètre près de la longueur du jet du javelot.
   (b) Donner un ordre de grandeur du nombre de fois où l'application a été téléchargée au cours du premier mois.
   (c) À quel moment de la journée la vidéo de Squeezie faisait-elle le plus de vues par jour ?
   (d) Donner une valeur approchée à l'unité d'aire près de $\displaystyle\int_0^4 h(t)dt$.
   (e) Quelle semble être la limite de la fonction g en $+\infty$? en 0 ?
   (f) Quel semble être le domaine de définition de la fonction f ?

3. Répondre aux questions suivantes (une justification graphique ne sera pas suffisante)
   (a) Déterminer les coordonnées de tous les points d'intersection de la courbe de h avec l'axe des abscisses.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^4 h(t)dt$.
   (c) Démontrer les limites de g conjecturées à la question précédentes.
   (d) Dresser le tableau de signe de la fonction g sur son domaine de définition *(et évidemment expliquer !)*
   (e) Déterminer le domaine de définition de f *(et évidemment expliquer !)*
   (f) Dresser le tableau de signe de la fonction f sur son domaine de définition *(et évidemment expliquer !)*

III - Communiquer ...

1) ... dans la vie courante : le jeu de la "dictée graphique"

2)... en langage mathématiques : les quantificateurs

Définition de notations mathématiques :

Dans une proposition mathématique, au lieu d'écrire en français, on peut utiliser des symboles :
- Le symbole $\forall$ signifie "pour tout" ou "quel que soit".
- Le symbole $\exists$ signifie "il existe" dans le sens "il existe au moins un".
- Le symbole $\exists!$ signifie "il existe un unique " .

Remarques importantes :

— Ne jamais utiliser $\forall$ ou $\exists$ dans une phrase en français comme une abréviation.

— Les symboles $\forall$ et $\exists$ se placent TOUJOURS AVANT la phrase qu'ils quantifient. Attention, en général c'est le contraire en français. Par exemple, la phrase : "l'inégalité $x^2 \geqslant 0$ est vraie pour tout réel x" s'écrit en mathématiques :
... et surtout pas ...

— Ces symboles sont très importants et ont une signification très précise. Il faut les manier avec précaution et bien comprendre la différence entre les deux car une propriété peut être vraie avec $\exists$ et fausse avec $\forall$. Par exemple,
la phrase "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$" est ... mais les phrases "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$" et "$\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$" sont ...

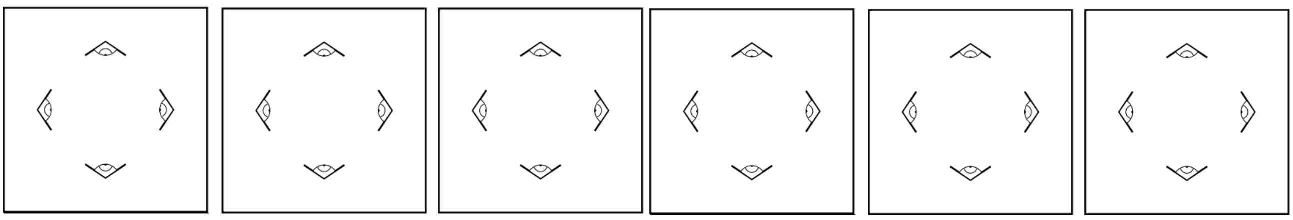
Exercice 6.

Si E est un ensemble d'individus, et a et b deux individus de cet ensemble, on note $a \to b$ le fait que l'individu a voit l'individu b.
On considère les énoncés suivants :

A : $\exists a \in E,\ \exists b \in E,\ a \to b$ **B** : $\forall a \in E,\ \forall b \in E,\ a \to b$ **C** : $\forall a \in E,\ \exists b \in E,\ a \to b$

D : $\exists a \in E,\ \forall b \in E,\ a \to b$ **E** : $\forall b \in E,\ \forall a \in E,\ a \to b$ **F** : $\forall b \in E,\ \exists a \in E,\ a \to b$

1. Paraphraser les énoncés précédents par une phrase en français "de tous les jours".
2. Que penser des énoncés **B** et **E** ? des énoncés **D** et **F** ? et des énoncés et **C** et **F** ?
3. Compléter les schémas suivants pour que chacun des énoncés A, B, C, D , E et F soient vrais. Plus précisément, on demande le nombre minimal de flèches pour que cela soit le cas.

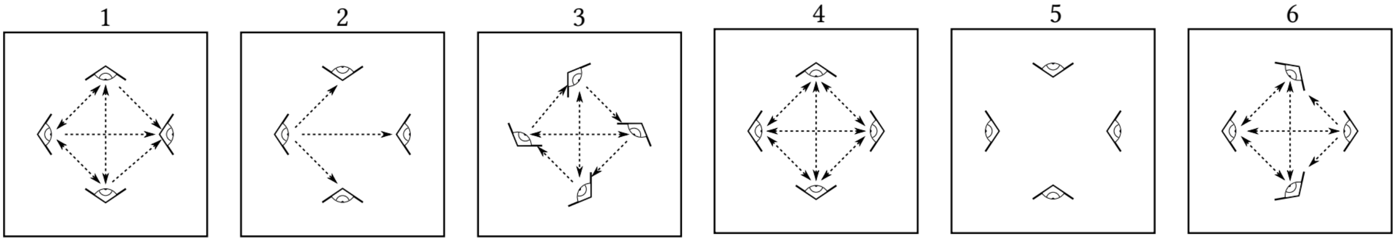


A B C D E F

Explications (si besoin) : une flèche signifie que la personne se trouvant à l'origine de la flèche voit la personne qui se trouve à l'extrémité de la flèche (et pas l'inverse, penser à un miroir sans teint par exemple). Si deux personnes sont en face l'une l'autre et donc se voit "mutuellement", on utilisera donc une double flèche.

4. Pour chacune des salles suivantes, quels énoncés, parmi les six énoncés A, B, C, D, E et F, sont vrais ?

1 2 3 4 5 6



5. Parmi les énoncés **A** à **F**, déterminer ceux qui sont conséquences obligatoires d'une autre énoncé. Par exemple, si **B** est vrai alors **A** l'est forcément aussi.
6. Même question pour les énoncés **1** à **6**.

IV - Découvrir en ECG1 ...

1) ... des calculs plus théoriques : les factoriels

(Extrait du cours d'ECG1 - Lycée Parc de Vilgénis - Mme Dellinger)

Définition (Factoriel):

- Soit n un entier **non nul**. On appelle **"factoriel n"**, le nombre, noté $n!$, égal au produit des entiers entre 1 et n :

$$n! = \qquad \dots$$

- Par convention, on pose : $0! = \quad \dots \quad .$

Exemples : $1! = \dots \quad 2! = \dots \quad 3! = \quad \dots \quad 4! = \quad \dots \quad 5! = \quad \dots$

Exemples : simplifier : $5! \times 6 = \quad \dots \qquad \dfrac{10!}{10} = \quad \dots \qquad \dfrac{10!}{7!} = \quad \dots$

Proposition (Règles de calculs du factoriel):

Pour tout entier naturel n non nul :

$$(n+1) \times n! = \quad \dots \qquad \text{et} \qquad n \times (n-1)! = \quad \dots \quad = \quad \text{et} \quad \frac{n!}{n} = \quad \dots$$

Démonstration :

Exemples : simplifier les expressions numériques puis littérales suivantes :

$$\frac{5!}{3!} = \quad \dots \qquad \dots \qquad\qquad 5! - 3! = \quad \dots$$

$$\frac{7!}{10!} = \dots \qquad\qquad \frac{7! \times 10!}{9! \times 5!} = \dots$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \dots \qquad\qquad \frac{(n+2)!}{n! \times n} = \dots$$

Attention !

Il n'y a pas d'autres formules pour les calculs avec les factoriels. Notamment, il existe des entiers n et m tels que :

$$(m \times n)! \neq m! \times n! \quad \text{et} \quad (m+n)! \neq m! + n! \quad \text{et} \quad (2n)! \neq 2 \times n!$$

En effet, par exemple :

[...]

Définition (Coefficient binomial):

Soient n et p deux entiers tels que ...

On appelle **coefficient binomial** , le nombre noté $\binom{n}{p}$ égal à $\boxed{\binom{n}{p} = \qquad}$

Exemples : calculer $\binom{4}{p}$ pour toutes les valeurs de p pour lesquelles l'expression existe.

Proposition (Propriétés calculatoires des coefficients binomiaux) :

Pour tous entiers naturels n et p tels que ... :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$ (Relation de Pascal)

Démonstration : les calculs pour démontrer la seconde égalité sont longs et assez subtils, nous les ferons en TD. Démontrer la première égalité par un calcul direct :

Définition (Le triangle de Pascal):

Le triangle de Pascal est un triangle qui est construit en utilisant la deuxième règle de calcul sur les coefficients binomiaux :

Exemple : on dispose de 5 objets et on veut en choisir 2 différents. Vérifier qu'il y a $\binom{5}{2}$ choix différents.

Proposition (Interprétation du coefficient binomial en dénombrement):

Soient n et p deux entiers tels que ... . On dispose de n objets et on veut en choisir p différents.

Le nombre de choix possibles est égal à : ...

Démonstration : admise pour le cas général.

2) ... des nouvelles notions : les graphes

(Extrait du cours d'ECG1 - Lycée Parc de Vilgénis - Mme Dellinger)

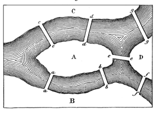
Définition (Graphes, sommets, arêtes):

- On appelle **graphe** tout ensemble de sommets reliés par des arêtes.
- Une arête qui relie un sommet à lui-même est appelée une ...
- Un graphe est dit complet si :
  - — il ne contient aucune boucle
  - — chaque sommet est relié à tous les autres par une et une seule arête .

Exercice 7. Représenter les situations suivantes avec un graphe :

1. Un tournoi de 5 équipes où toutes les équipes se rencontre une fois.
2. le plan de la ville de Königsberg (actuellement Kaliningrad) en Russie où les sommets sont les quartiers et les arêtes sont les ponts reliant ces quartiers.

Fig. 1.



Les ponts de Kœnigsberg en 1759.

Exercice 8. **Trois démonstrations pour un résultat !**

1. Dessiner un graphe complet à n sommets pour n allant de 1 à 5.
2. Déterminer le nombre de sommets d'un graphe complet à n sommets pour n allant de 1 à 5.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Essayer de conjecturer le nombre d'arêtes d'un graphe à n sommets.
4. Besoin d'un peu d'aide à la question précédente ?

   La réponse se trouve parmi les propositions suivantes : $3n \qquad 3(n-1) \qquad n! \qquad \dfrac{n!}{2} \qquad \dfrac{n(n-1)}{2} \qquad n(n-1)$
5. Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente avec une des méthodes suivantes (ou essayer les trois ?) :
   - **Méthode 1 :** utiliser l'indication "tracer une arête (qui n'est pas une boucle) c'est choisir deux sommets différents" et une des propositions présente dans ce livret.
   - **Méthode 2 :** montrer que ce nombre est obtenu par la somme $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$ qui vient d'un décompte des arêtes fait de la manière suivante :
     - — On compte d'abord toutes les arêtes qui partent d'un premier sommet, on enlève alors ce sommet et toutes les arrêtes comptées.
     - — On choisit alors un autre sommet et on recommence en comptant le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet puis on les supprime.
     - — On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommet.
     - — On calcule ensuite la somme voulue en utilisant le cours de Terminale sur la somme des termes d'une suite arithmétique.
   - **Méthode 3 :** une démonstration par récurrence

3) ... et prendre du recul : la commutativité sur Micmaths (chaîne Youtube de Mickaël Launay)

"La commutativité ou l'art de retourner la situation" .

Exercice 9. Choisir dans la vie courante ou en mathématiques deux tâches que l'on effectue l'une à la suite de l'autre et déterminer si ces tâches sont "commutatives" au sens présenté dans la vidéo de Mickaël Launay.