Programme de colle 02

Semaine du 29 septembre 2025

La colle se déroule de la manière suivante :

- Une question de cours sur les fonctions
- Une question de cours sur les sommes
- Un ou plusieurs calculs issus du cahier de calculs.
- Un ou plusieurs exercices proposés par le colleur correspondant au programme

- **Première question de cours sur les fonctions : les fonctions usuelles**
  - La fonction carrée : domaine de définition, graphique, majorant et minorant éventuels, monotonie **avec démonstration**, règle de calcul "comment passer au carré dans une inégalité ?"
  - La fonction cube : domaine de définition, graphique, majorant et minorant éventuels, monotonie **avec démonstration (si besoin le colleur peut aider en indiquant la factorisation)**, règle de calculs "comment passer au cube dans une inégalité ?"
  - La fonction racine carrée : domaine de définition, graphique, majorant et minorant éventuels, monotonie **avec démonstration (attention, astuce de la "quantité conjuguée" à retenir !)**, règle de calculs "comment passer à la racine dans une inégalité ?"
  - La fonction inverse : domaine de définition, graphique, majorant et minorant éventuels, monotonie **avec ou sans démonstration(au choix de l'étudiant car la démo n'a pas été faite en classe)**, règle de calculs "comment passer à l'inverse dans une inégalité ?"

- **Deuxième question de cours sur les sommes : les sommes usuelles**.

(Pour cette première colle sur les sommes, pour écrire une somme, l'étudiant pourra choisir au choix l'écriture avec le symbole $\sum$ ou les pointillés. Nous automatiserons l'utilisation de $\sum$ au fur et à mesure de l'année.)

- Connaître par coeur la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et faire la démonstration (par récurrence).
- Connaître par coeur la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et faire la démonstration (par récurrence).

  (Démonstration non faite en classe, à faire en autonomie et voir correction page suivante)
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Connaître par coeur la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$ et faire la démonstration

  (Méthode au choix : récurrence ou indication donnée en cours à connaître car elle ne sera pas donné par le colleur.)

Programme de la colle : chapitre 2 (en entier) et chapitre 3 (tout sauf la page 6 (binôme de Newton)

- **Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions**
  - Définition d'une fonction, image, antécédent
  - Fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: représentation graphique, position relative de deux courbes, régionnement.
  - Fonction majorée, minorée, bornée ; maximum d'une fonction, minimum d'une fonction.
  - Fonction croissante ou décroissante sur un intervalle I : définition et utilisation de la définition dans les inégalités.
  - Fonctions usuelles à connaître : fonction affine, fonction linéaire, fonction constante, fonction carrée, fonction cube, fonction inverse ; fonction racine carrée : domaine de définition, graphique, minoration, monotonie.

- **Chapitre 3 : tout sauf le binôme de Newton**

- **Séance 1 :** le symbole $\sum$
  - Définition, savoir passer d'une écriture en "pointillés" à une écriture avec Σ et inversement.
  - Règles de calculs simples (linéarité, "Chasles", indice muet, sommation d'égalités et d'inégalités)
  - Les 4 sommes usuelles : somme des entiers, des carrés, des cubes et somme géométrique.
- **Séance 2 :** le symbole $\prod$ et les factoriels
- **Séance 3 :** seulement Coefficient binomial : définition et propriétés calculatoires (symétrie et relation de Pascal)

Complément : démonstration de : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Rédaction : la démonstration est rédigée avec le symbole $\sum$. En cas de difficulté de compréhension, repasser aux pointillés. Si cela ne suffit pas, venez me poser la question !

La méthode utilisée est la démonstration par récurrence.

- **Introduction :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : "$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$".

- **Initialisation :** pour $n = 1$, on a :
  d'une part $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$
  et d'autre part, $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$.
  Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
  Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  On a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{ok}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. On veut : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \overset{?}{=} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

  Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \qquad \text{(car } \mathcal{P}_n \text{ supposée vraie)} \\
&= \frac{(n(n+1))^2}{2^2} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4} \times \left(n^2 + 4(n+1)\right) \qquad \text{(factorisation par } \frac{(n+1)^2}{4}\text{)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4} \times \left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2 \\
&= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{2^2} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

  donc P_{n+1} est vraie ce qui achève l'hérédité.

- **Conclusion :** la propriété P_n est initialisée à $n = 1$ et héréditaire, donc par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$