Programme de colle 03

Semaine du 6 octobre 2025

Cette colle se déroule de la manière suivante :

- Une question de cours sur le chapitre 3
- Un ou plusieurs exercices proposés par le colleur correspondant au programme

Question de cours sur le chapitre 3.

Pour écrire une somme dans les énoncés et les démonstrations, l'étudiant pourra choisir au choix l'écriture avec le symbole $\sum$ ou les pointillés. Nous automatiserons l'utilisation de $\sum$ au fur et à mesure de l'année.

- Connaître par coeur la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k^2$ et faire la démonstration (par récurrence).
- Connaître par coeur la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k^3$ et faire la démonstration (par récurrence). (**Démonstration non faite en classe, à faire en autonomie et voir correction page suivante**)
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Connaître par coeur la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n x^k$ et faire la démonstration (méthode au choix : récurrence ou avec l'indication vue en cours qui ne sera pas donnée par le colleur et donc qu'il faudra connaître!)
- Définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ et condition d'existence. Lien avec le triangle de Pascal. Énoncé et démonstration de $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Énoncé de la relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, démonstration seulement si l'étudiant le propose.
- Formule du binôme de Newton : énoncé avec les pointillés et avec le symbole $\sum$. Pas de démonstration. Applications : développer $(1+2x)^5$ et $(x-3)^6$.

Programme de la colle : chapitre 2 (en entier) et chapitre 3 (en entier)

• Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions

- Définition d'une fonction, image, antécédent
- Fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: représentation graphique, position relative de deux courbes, introduction au régionnement du plan.
- Fonction majorée, minorée, bornée ; maximum d'une fonction, minimum d'une fonction.
- Fonction croissante ou décroissante sur un intervalle I : définition et utilisation de la définition dans les inégalités.
- Fonctions usuelles à connaître : fonction affine, fonction linéaire, fonction constante, fonction carrée, fonction cube, fonction inverse ; fonction racine carrée : domaine de définition, graphique, minoration, monotonie.

• Chapitre 3

- Symbole $\sum$: définition, savoir passer d'une écriture en "pointillés" à une écriture avec $\sum$ et inversement.
- Règles de calculs simples avec $\sum$: linéarité, "Chasles", indice muet, sommation d'égalités et d'inégalités.
- Les 4 sommes usuelles : somme des entiers, des carrés, des cubes et somme géométrique.
- Symbole $\prod$: définition (attention, on n'a pas fait d'exercice)
- Factoriel $n!$: définition, règles de calculs : $(n+1)! = (n+1) \times n!$, $n! = n \times (n-1)!$ et $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$
- Définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ et condition d'existence. Lien avec le triangle de Pascal. Énoncé et démonstration de $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Énoncé de la relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- Formule du binôme de Newton (admise).

Complément : démonstration de : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Rédaction : la démonstration est rédigée avec le symbole $\sum$. En cas de difficulté de compréhension, repasser aux pointillés. Si cela ne suffit pas, venez me poser la question !

La méthode utilisée est la démonstration par récurrence.

- **Introduction** : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : " $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ".

- **Initialisation** : pour $n = 1$, on a :

d'une part $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ et d'autre part, $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a : $\sum_{k=1}^n k^3 \stackrel{ok}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. On veut : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \stackrel{?}{=} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour cela, on calcule : } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k^3\right) + (n+1)^3 \\
 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \quad (\text{car } \mathcal{P}_n \text{ supposée vraie}) \\
 &= \frac{(n(n+1))^2}{2^2} + (n+1)^3 \\
 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\
 &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n^2 + 4(n+1)) \quad (\text{factorisation par } \frac{(n+1)^2}{4}) \\
 &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n^2 + 4n + 4) \\
 &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2 \\
 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} \\
 &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \quad \text{donc } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie ce qui achève l'hérédité.}
 \end{aligned}$$

- **Conclusion** : la propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée à 1 et héréditaire, donc par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$