Programme de colle 06

Semaine du 17 novembre 2025

Déroulement de la colle :

- Une question de cours sur les matrices
- Sur les matrices, deux questions "à savoir faire" imposées (qui seront faites soit séparément soit au cours d'un exercice) :
  - Montrer qu'une matrice A est inversible et trouver son inverse à partir d'une relation entre I, A et A^2 (ou A^3...). (méthode dite du "polynôme annulateur"). Exemple page 10 dans le cours et exercice 6 TD 05.
  - Démontrer une formule de puissance nième de matrice par un raisonnement par récurrence.
- **Un ou plusiques exercices sur les matrices permettant d'étudier une ou plusieurs suites (comme la semaine dernière), ou bien un exercice portant uniquement sur les matrices : résolution d'équations matricielles, préparation à la diagonalisation.... Mais tout cela doit évidemment être guidé (et toujours pas de systèmes linéaires compliqués)**

Question de cours sur les matrices :

- condition générale d'existence pour le produit de deux matrices, exemple de calcul du produit de deux matrices sur deux exemples proposés par l'étudiant : un premier avec des matrices rectangulaires et un second avec des matrices carrées.

- Le produit des matrices n'est pas commutatif : si A et B sont deux matrices carrées de taille n, le produit AB n'est pas toujours égal à BA. Exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  Donner la définition : "deux matrices A et B carrées de taille n commutent si $A \times B = B \times A$".
  Par exemple la matrice identité I_n commute avec n'importe quelle matrice A de $\mathcal{M}_n$ car $A \times I_n = I_n \times A$.

- Donner la définition d'une matrice inversible.
  Puis donner le lien entre matrice inversible et matrice carrée :
  - Une matrice inversible est forcément carrée (ce qui signifie exactement que si une matrice n'est pas carrée, alors elle ne peut pas être inversible) ce qui s'écrit :
  $$A \text{ est inversible} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ est une matrice carrée}$$
  - Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles, ce qui s'écrit :
  $$A \text{ est carrée} \quad \not\Longrightarrow \quad A \text{ est une matrice inversible.}$$
  Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou la $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ sont carrées mais non inversibles.

- Donner la définition d'une matrice inversible.
  Donner les deux cas particuliers de caractérisation des matrices inversibles dans le cas des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans le cas des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsque ces matrices sont inversibles donner les inverses.

Programme détaillé de la colle :

- **Chapitre 5 - les matrices**
  - Définition d'une matrice, notation $\mathcal{M}_{np}$, matrice nulle , matrice identité
  - Opérations sur les matrices : multiplication par un réel, addition et multiplication de deux matrices, transposée d'une matrice (seulement la définition à savoir, les propriétés calculatoires ne sont pas à connaître mais peuvent être démontrées en exercice),
  - Matrices carrées : notation $\mathcal{M}_n$, matrice identité I_n, multiplication de matrices carrées de même taille, non commutativité du produit, définition de deux matrices qui commutent, identités remarquables ok seulement si les matrices commutent, puissances successives d'une matrices carrées (calculs directs ou démonstration par récurrence)
  - Matrices inversibles : définition, une matrice inversible est forcément carrée donc une matrice non carrée ne peut pas être inversible, une matrice carrée n'est pas forcément inversible.
  - Trouver l'inverse d'une matrice inversible : soit en application directe de la définition avec résolution d'un système(ok pour les matrices 2x2, pour les matrices plus grandes seulement si beaucoup de 0), soit après avoir montré une relation du type $A^2 + 3A - I_n = 0_n$.

— règles de calculs donnant l'inverse de l'inverse, l'inverse d'un produit et l'inverse d'une transposée. Caractérisation de matrices inversibles pour les matrices 2x2 avec le déterminant et pour les matrices diagonales (pas encore les matrices triangulaires).

pas encore de pivot de Gauss ni d'inversion d'un système ni de déterminant .

Pour les colleurs : pas de déterminant, pas d'exercices avec le binôme de Newton pour les matrices (semestre 2), pas encore de résolution de systèmes compliqués (le chapitre sera fait plus tard)