Colle 09 : composition, bijection et réciproque

Semaine du 08 décembre 2025

Déroulement de la colle :

- Une question de cours.
- Une démonstration du cours
- Résoudre une des 4 équations ou inéquations (très simples!) de la question 1 de l'exercice 5 du TD 07. **exercice non traité en classe, à faire en autonomie, la correction est sur CDP. Me poser des questions lundi si besoin !**

$\ln(x-3)-1 \geqslant 0 \qquad e^{2x-3}-2 \geqslant 0 \qquad \ln(x-1)-\ln(2x)=0 \qquad e^{2x}+2e^{-x} \leqslant 0$

- Quatre types de questions à faire séparément ou au sein d'un exercice :
  - Déterminer le domaine de définition d'une fonction composée.
  - Calculer la composée de deux fonctions.
  - Montrer qu'une fonction est une bijection de I dans J et trouver sa récpiroque en montrant que, pour tout $y \in J$ l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution dans I (pour cela, on cherche à exprimer x en fonction de y.) Raisonnement fait dans l'exercice 10 et la question 3 de l'exercice 6.
  - Résoudre une équation ou une inéquation plus compliquée avec exp ou ln (en respectant bien les étapes données dans le cours!)

Questions de cours :

- Définition de $f \circ g$ et domaine de définition théorique de $f \circ g$: $x \in \mathcal{D}_{f\circ g} \Longleftrightarrow \left(x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) \in \mathcal{D}_f\right)$.
  Illustration sur un exemple simple donné par l'étudiant comportant la fonction ln (voir cours ou TD)
- La fonction exponentielle : graphique, domaine de définitions, ensemble des valeurs prises, monotonie, propriétés calculatoires. (pas encore de limites)
- La fonction logarithme népérien : graphique, domaine de définitions, ensemble des valeurs prises, monotonie, propriétés calculatoires. (pas encore de limites)
- Définition d'une bijection de I dans J. Définition d'une injection de I dans J et d'une surjection de I dans J
- Si f est une bijection de I dans J alors il existe une fonction appelée "fonction réciproque" de la fonction f que l'on note f^{-1} et qui vérifie les propriétés suivantes :
  - f^{-1} est une bijection de J dans I
  - Pour tout $x \in$ et pour tout $y \in J$: $\quad y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$
  - $\forall x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) = x$
  - $\forall y \in J, \quad f \circ f^{-1}(y) = y$
  - Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (qui est la droite d'équation $y = x$).

Démonstrations de cours :

- En admettant la propriété fondamentale de l'exponentielle démontrer que :$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- En admettant la propriété fondamentale de l'exponentielle démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- **(seulement sur proposition de l'étudiants car corrigé seulement dans le groupe AP approfondissement)**
  En admettant la propriété fondamentale de l'exponentielle démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\exp(x))^n = \exp(n \times x)$
- En admettant la propriété fondamentale du logarithme démontrer que : $\forall x > 0, \quad \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- En admettant la propriété fondamentale du logarithme démontrer que : $\forall x > 0, \forall y > 0, \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- **(seulement sur proposition de l'étudiants car corrigé seulement dans le groupe AP approfondissement)**
  En admettant la propriété fondamentale du logarithme démontrer que : $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(x^n) = n\ln(x)$

Programme détaillé :

- Révision si besoin de la séance 1 du chapitre 2 sur les fonctions (définition d'une fonction, d'une image, d'un antécédent, domaine de définition...)

- Chapitre 7 : composition, bijection et réciproque
  Tout le chapitre sauf lundi où la séance 5 (résolution d'équation et inéquations avec exp en ln) n'est pas au programme.

Indications/commentaires importants pour les étudiants et les colleurs :

- **Toute question de cours non maîtrisée entrainera une note en dessous de la moyenne.**
- Pas encore d'étude de fonction en utilisant la dérivée, pas encore de continuité ou de théorème des valeurs intermédiaires....
- Pour montrer qu'une fonction est une bijection, on utilisera exclusivement la définiton. Les exercices peuvent porter sur des fonctions numériques, sur des fonctions dont on connaît uniquement le graphique ou sur des fonctions issus d'exemples concrets.
- N'interroger sur les réciproques que si le reste est maîtrisé.