Programme de colle n° 14 : Espaces probabilisés finis.

Semaine du lundi 15 janvier.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Espace probabilisable fini

14.1 Notion intuitive d'expérience aléatoire, d'univers et d'événement. Espace probabilisable fini. Événement, événement élémentaire.

14.2 Opérations sur les événements : événement certain, impossible, événement contraire d'un événement, événements "A et B" et "A ou B", où A et B sont des événements. Événements incompatibles, implication d'événements.

14.3 Système complet d'événement. Notion de réunion disjointe. Notation $\sqcup$.

Espace probabilisé fini

14.4 Probabilité sur un espace probabilisable fini. Notion d'espace probabilisé fini. Modéliser une expérience aléatoire consiste à lui associer un espace probabilisé fini, exemples de modélisation. Probabilité d'une réunion disjointe (finie) quelconque.

14.5 Sur un espace probabilisé fini, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient (proposition 15). Caractérisation et existence d'une probabilité (sur un espace probabilisable fini) en terme de probabilités des événements élémentaires (proposition 16).

14.6 Notion de probabilité uniforme, situation d'équiprobabilité. Exemples.

Propriétés des probabilités

14.7 Propriétés élémentaires des probabilités (proposition 23). Formule des probabilités totales sans conditionnement.

Probabilités conditionnelles

14.8 Notion de probabilité conditionnelle. Interprétation. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et A un événement de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Les propriétés vues pour les probabilités sont vraies pour une telle probabilité conditionnelle.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion d'espace probabilisable fini. Donner le vocabulaire probabiliste associé aux opérations ensemblistes sur les événements.
2. Définir la notion de système complet d'événement. Donner 3 exemples bien différents (à l'appréciation du colleur qui pourra, le cas échéant, demander si des événements donnés forment un SCE).
3. Définir la notion de probabilité sur un espace probabilisable fini, puis la notion d'espace probabilisé fini. Énoncer la proposition relative aux réunions disjointes finies.
4. Énoncer et démontrer la proposition 15 caractérisant une probabilité à l'aide des événements élémentaires.
5. Énoncer la proposition 16, et la définition (et proposition) de la notion de probabilité uniforme. Expliquer brièvement la démonstration de la proposition 16, et démontrer que la définition précédente est bien posée.
6. On lance deux dés à 6 faces équilibrés et on note, dans l'ordre, les résultats obtenus. Modéliser le problème, déterminer la probabilité d'obtenir au moins un 6.
7. Énoncer la proposition donnant les propriétés élémentaires des probabilités. En démontrer un certain nombre, au choix du colleur.
8. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales sans conditionnement.
9. Définir la notion de probabilité conditionnelle. Montrer que si A est un événement de probabilité non nul d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, alors $\mathbb{P}_A$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.