Lycée Hoche
ECG1 A

2023-2024
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 3

*Devoir du **13 janvier 2024**.*

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, u_n = 0.$$
2. On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 + 2x + 3y = 0\}$ et $B = \{(t+1, -1 - \frac{2}{3}t) | t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.
3. Donner en extension, et sans justification, l'ensemble des parties de $\{\pi, \mathrm{e}, 1\}$.
4. Définir à l'aide d'énoncés quantifiés les notions d'application injective puis d'application surjective.
5. Énoncer sans démonstration la formule du binôme de Newton.
6. Soit f une fonction réelle, et x un réel en lequel f est définie. Que signifie "f est continue en x" ?
7. Énoncer et démontrer la formule dite "du crible", donnant le cardinal d'une réunion de 3 parties d'un ensemble fini.
8. Démontrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$ est bijective, et déterminer sa réciproque.
9. Énoncer le théorème de la limite monotone pour les suites réelles.
10. Écrire le code d'une fonction python d'entête `def ListeU(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie la liste des termes $[u_0, u_1, \ldots, u_{\mathtt{n}}]$ de la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 2 + n$.

Exercice 2 *Méthodes et calculs. Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.*

1. Dans chaque cas, étudier la limite de la suite u donnée par :

   (a) $\forall n \geq 1, u_n = \dfrac{4 \times 2^n - 3 \times 4^n + 1}{\ln(n)^2 - (2n)^2 + e + 1}$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{\ln(2^n - n + 1)}{\frac{1}{3^n} + 2n - \sqrt{n}}$.

   On ne demande pas de justifier la bonne définition des u_n.

2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k$.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^k$.

3. On considère la fonction réelle f donnée par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln^2(x^2)}$. *Rappel : $\ln^2(t)$ désigne $(\ln(t))^2$ dès que cela fait sens.*

   (a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.

   (c) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (d) Étudier la limite de f en 0.

   (e) Dresser le tableau de variation complet de f.

   (f) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   (g) Montrer que f induit une bijection, notée $\tilde{f}$, de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à préciser, puis déterminer la réciproque de $\tilde{f}$.

Exercice 3 *Sommes et coefficients binomiaux*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, fixé dans tout l'exercice. Le but de cet exercice est de calculer la somme :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}.$$

1. On pose $B(X) = 2X^2 + \frac{5}{2}X + \frac{1}{2}$. *Les 3 sous-questions suivantes sont indépendantes de la suite de l'exercice.*

   (a) Montrer que B admet deux racines réelles, notées α et β dans la suite. Donner la forme factorisée de B.

   (b) Soit R le reste de la division euclidienne de $f(X)$ par $B(X)$. Que dire sur le degré de R? Déterminer $R(\alpha)$ et $R(\beta)$.

   (c) En déduire l'expression développée de $R(X)$.

2. (a) Justifier que f, puis f', sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x. (f'' est la dérivée de f').

   (c) En déduire $f'(1)$ et $f''(1)$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(1+x)^{2n}$ et $(1-x)^{2n}$.

   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}$.

   (c) En déduire des expressions de $f'(1)$ et $f''(1)$ sous forme de sommes.

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier p :

$$p^2 = a \cdot 2p(2p-1) + b \cdot 2p.$$

5. Déduire des questions précédentes une expression de S_n en fonction de n.

Exercice 4 *Dénombrement. Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Partie I : Quelques lancers de dés. Les réponses aux questions pourront être exprimées à l'aide de coefficients binomiaux (sans calculer leurs valeurs).

Une joueuse dispose de 4 dès à 20 faces, numérotées de 1 à 20. Elle lance ces 4 dès successivement et note, dans l'ordre, les faces obtenues.

1. Modéliser mathématiquement l'ensemble Ω des résultats possibles, et déterminer son cardinal.
2. Quel est le nombre de résultats formés de faces deux à deux distinctes?
3. Quel est le nombre de résultats contenant les faces 1,5,10 et 15?
4. (a) Déterminer le nombre de résultats ne comportant que des faces au moins égales à 12.
   (b) En déduire le nombre de résultats comportant au moins une face inférieure à 11.
   (c) Déterminer le nombre de résultats comportant au moins un nombre pair.
5. (a) Montrer qu'il y a exactement $\binom{4}{2} \times 361$ résultats comportant exactement deux faces 2.
   (b) Déterminer le nombre de résultats comportant exactement une face 1 et exactement une face 20.

Partie II : Autour d'une formule de Vandermonde

Le but de cette partie est de démontrer que pour tous entiers naturels n, m et r :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Cette égalité est appelée l'identité de Vandermonde. On fixe dans la suite trois entiers naturels n, m et r, et on va procéder par disjonction des cas.

6. Dans cette question, on suppose $r > n+m$ (1e cas).
   (a) Montrer que : $\forall k \in [\![0, r]\!], k \leq n \implies r-k > m$.
   (b) En déduire l'identité de Vandermonde, sous l'hypothèse $r > n+m$ de ce premier cas.
7. Dans cette question, on suppose $r \leq n+m$ (2e cas). On considère une urne contenant n boules blanches numérotées de 1 à n, et m boules noires numérotées de 1 à m. On tire r boules dans cette urne simultanément, et on note les boules (numéro et couleur) obtenues.
   (a) Quel est le nombre de tirages possibles?
   (b) Soit $k \in [\![0, r]\!]$. Montrer qu'il y a $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ tirages possibles contenant exactement k boules blanches.
   (c) En déduire l'identité de Vandermonde dans ce second cas.

Exercice 5 *Problème d'analyse.*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$. Notons (C_f) la courbe représentative de f.

Partie I : Étude de f.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
   (b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq x$ d'inconnue réelle x.
   (c) Donner une interprétation graphique du résultat précédent, reliant (T) et (C_f).
5. Tracer, dans un même repère orthonormé et à l'aide des questions précédentes, l'allure de (C_f) et (T).
6. Écrire un code python permettant de tracer (C_f) et (T) sur un même graphique, entre -10 et 10.

Partie II : Étude d'une première suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n).$$

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{n+1}$.
8. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
9. En déduire que la suite u converge, et donner sa limite.
10. Écrire un code Python qui :
    - Définit une fonction `f` prenant en entrée un nombre `x` et renvoyant la valeur de f en `x`, puis
    - Calcule et **affiche**, à l'aide d'une boucle while, le plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que $u_n \leq 0,0001$.

Partie III : Étude d'une seconde suite.

On considère la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = -2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n).$$

11. Démontrer que $v_2 \in [-1, 0]$.
12. Démontrer que : $\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0$.
13. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$. *On s'aidera de résultats de la partie I.*
14. Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 2}$, puis v, convergent.
15. Déterminer la limite de v.
16. Résoudre l'équation $f(x) = -1$ d'inconnue réelle x.
17. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \neq -1$.

— Fin de l'énoncé —