Correction : DS n°3

DS du 13 janvier 2024.

Le sujet était assez long et contenait plus de questions difficiles que le dernier DS. La majorité des questions des exercices 1,2, 4 partie I et 5 étaient abordables sans difficulté. Le 3 est un bon exercice de calcul un peu inhabituel sans être trop difficile. La partie II du 4 mettait en œuvre une preuve par double décompte (compter une même quantité de deux manières différentes pour prouver une égalité).

Exercice 1

1. Cf cours.

2. Cf exo similaire déjà corrigé pour les méthodes. Les calculs diffèrent mais sont très simples.

3. $$\mathcal{P}(\{\pi, e, 1\}) = \{\emptyset, \{\pi\}, \{e\}, \{1\}, \{\pi, e\}, \{\pi, 1\}, \{e, 1\}, \{\pi, e, 1\}\}.$$

4. Cf cours (définition).

5. Cf cours.

6. On dit que f est continue en x si f admet une limite en x. Dans ce cas, on peut démontrer que cette limite est le réel $f(x)$. Autre réponse possible : f est continue en x si : $f(t) \xrightarrow[t\to x]{} f(x)$.

7. Cf cours. Il s'agit avant tout de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, où $y \in [1, +\infty[$ est un réel fixé.

8. Cf cours.

9. Cf cours.

10.
```
def ListeU(n):
        u=1
        L=[]
        for i in range(n):
                u=2*u-2+i #calcul de u(i+1)
                L.append(u) #ajout de u(i+1)
        return(L)
```

Exercice 2

1. (a) Soit $n \geq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{4 \cdot 2^n - 3 \cdot 4^n + 1}{\ln(n)^2 - (2n)^2 + e + 1} \\
&= \frac{-3 \cdot 4^n (1 + \frac{4 \cdot 2^n}{-3 \cdot 4^n} + \frac{1}{-3 \cdot 4^n})}{-4n^2 (1 - \frac{\ln(n)^2}{-4n^2} + \frac{e+1}{-4n^2})} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{4^n}{n^2} \cdot \frac{1 + \frac{4 \cdot 2^n}{-3 \cdot 4^n} + \frac{1}{-3 \cdot 4^n}}{1 - \frac{\ln(n)^2}{-4n^2} + \frac{e+1}{-4n^2}}
\end{aligned}$$

Appelons (1) cette dernière expression de u_n.

On a :

- $\dfrac{2^n}{4^n} = (\dfrac{1}{2})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|\dfrac{1}{2}| < 1$. Par produit avec un réel :

$$\frac{4 \cdot 2^n}{-3 \cdot 4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- De même, $\dfrac{1}{-3 \cdot 4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\dfrac{1}{4^n} = (\dfrac{1}{4})^n$ et $|\dfrac{1}{4}| < 1$.
- Par somme, d'après ces deux dernières limites, on a (2):

$$1 + \frac{4 \cdot 2^n}{-3 \cdot 4^n} + \frac{1}{-3 \cdot 4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(n)^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par produit :

$$\frac{\ln(n)^2}{-4n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par produit, $\dfrac{e+1}{-4n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Par somme, on obtient (3):

$$1 - \frac{\ln(n)^2}{-4n^2} + \frac{e+1}{-4n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- Finalement, par quotient (avec (2) et (3)) :

$$\frac{1 + \dfrac{4 \cdot 2^n}{-3 \cdot 4^n} + \dfrac{1}{-3 \cdot 4^n}}{1 - \dfrac{\ln(n)^2}{-4n^2} + \dfrac{e+1}{-4n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1} = 1.$$

- Enfin, $\dfrac{4^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissance comparée (car $4 > 1$). Par produit, $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Finalement, par produit des deux dernières limites obtenues, et vu l'égalité (1) :

$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\ln(2^n - n + 1)}{\dfrac{1}{3^n} + 2n - \sqrt{n}} \\
&= \frac{\ln(2^n(1 - \frac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}))}{2n(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})} \\
&= \frac{\ln(2^n) + \ln(1 - \frac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n})}{2n(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})} \\
&= \frac{n\ln(2)}{2n(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})} + \frac{\ln(1 - \frac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n})}{2n(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})}
\end{aligned}$$

Appelons (1) cette dernière expression de u_n.

On sait que $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $(3 > 1)$. Par quotient puis par somme :

$$1 + \frac{1}{2n3^n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

De plus, $\frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée, et $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme :

$$1 - \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par continuité du logarithme en 1 :

$$\ln(1 - \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1) = 0.$$

De plus, $2n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par produit puis quotient :

$$\frac{\ln(1 - \frac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n})}{2n(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Enfin, par inverse puis produit :

$$\frac{n\ln(2)}{2n(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})} = \frac{\ln(2)}{2(1 + \dfrac{1}{2n3^n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}.$$

Finalement, par somme à l'aide de (1) valide pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}.}$$

2. (*a*)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^{j+1} && \text{(en posant } j = k-1\text{)} \\
&= 2\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^j 1^{n-1-j} && \text{(par linéarité)} \\
&= 2(2+1)^{n-1} && \text{(par le binôme de Newton)} \\
&= 2 \cdot 3^{n-1}.
\end{aligned}$$

(*b*) Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 2^k$. Le premier terme de S_n est nul, donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} 2^k.$$

Par théorème, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Par conséquent :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} 2^k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k.$$

D'après la question précédente : $\boxed{S_n = 2n3^{n-1}.}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. L'expression définissant $f(x)$ est bien définie si et seulement si $\ln^2(x^2)$ est bien définie (car l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$), si et seulement si $\ln(x^2)$ est bien défini. Or, $x^2 \geq 0$ (tout carré est positif) donc :

$$x^2 \in \mathbb{R}_+^* \iff x^2 \neq 0 \iff x \neq 0.$$

Finalement, $f(x)$ est bien défini ssi $x \neq 0$:

$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

4. f est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$ par opérations sur des fonctions dérivables sur leurs domaines de définition.

   Posons $u(x) = \ln^2(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, u est dérivable comme composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, u'(x) = 2\ln(x^2) \times \frac{1}{x^2} \times 2x = 4\frac{\ln(x^2)}{x}.$$

   Remarque : attention ne pas utiliser $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ *ici, car c'est faux pour* $x < 0$.

   Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\boxed{f'(x) = e^{u(x)}u'(x) = \mathrm{e}^{\ln^2(x^2)} \times 4\frac{\ln(x^2)}{x}.}$

5. On sait que $x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition, $\ln(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Or, $t^2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition :

$$\ln^2(x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

   Enfin, $e^t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition :

$$f(x) = e^{\ln^2(x^2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

   De même, $x^2 \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ donc par les mêmes compositions successives :

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty.$$

   $\boxed{\text{La limite de } f \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty \text{ est } +\infty.}$

6. On sait que $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc par composition :

$$\ln(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

   Or, $t^2 \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ donc par composition, $\ln^2(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et une dernière composition par l'exponentielle donne :

   $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.}$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $f'(x) = \mathrm{e}^{\ln^2(x^2)} \times 4\frac{\ln(x^2)}{x}$ est du signe de $\frac{\ln(x^2)}{x}$ car $4 > 0$ et car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

   Or, $\ln(x^2) > 0 \iff x^2 > 1 \iff x < -1$ ou $x > 1$, et $\ln(x^2) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$.

   On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln(x^2)$		+	0	-	|	-	0	+	
$\frac{1}{x}$		-		-	|	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	|	-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

8. f admet une limite en 0, mais qui n'est pas finie :

   $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0.}$

9. *On pourrait argumenter avec le tableau de variation, mais puisque la question demande de donner la réciproque de f, il faut résoudre l'équation à paramètre ci-dessous, ce qui résoudra l'intégralité de la question.*

   Soit $x \in [1, +\infty[$ et y un réel.

   x est un antécédent de y si et seulement si $f(x) = y$, ssi $\mathrm{e}^{\ln^2(x^2)} = y$. L'exponentielle étant à valeurs positive, cette dernière égalité est fausse si $y \leq 0$. Dans ce cas, y n'a donc pas d'antécédent par f.

Si $y > 0$:

$$f(x) = y \iff e^{\ln^2(x^2)} = y \iff \ln^2(x^2) = \ln(y).$$

Si $y < 1$, alors $\ln(y) < 0$ et $\ln^2(x^2)$ est positif comme carré. L'égalité précédent est donc fausse, et y n'a donc pas d'antécédent par f dans ce cas.

Si $y \geq 1$, on poursuit l'équivalence précédente par croissance stricte de la racine carrée:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff |\ln(x^2)| = \sqrt{\ln(y)} \\ &\overset{(1)}{\iff} \ln(x^2) = \sqrt{\ln(y)} \\ &\iff x^2 = e^{\sqrt{\ln(y)}} \\ &\iff x = \sqrt{e^{\sqrt{\ln(y)}}} \text{ ou } x = -\sqrt{e^{\sqrt{\ln(y)}}} \\ &\overset{(2)}{\iff} x = \sqrt{e^{\sqrt{\ln(y)}}}. \end{aligned}$$

(1) : $x \geq 1$ donc $x^2 \geq 1$ donc $\ln(x^2) \geq 0$.

(2) : car $x \geq 1$ donc $x \geq 0$, donc $x \neq -\sqrt{e^{\sqrt{\ln(y)}}}$.

Enfin, si $y \geq 1$, alors on vérifie que $\sqrt{e^{\sqrt{\ln(y)}}} \geq 1$, de sorte qu'on a démontré :

- Si $y < 1$, alors y n'a aucun antécédent par f.
- Si $y \geq 1$, y a un unique antécédent par f sur $[1, +\infty[$ donné par $\sqrt{e^{\sqrt{\ln(y)}}}$.

En d'autre termes, l'application $\tilde{f} : \left| \begin{array}{lcl} [1, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bijective, de réciproque :

$$\tilde{f}^{-1} : \left| \begin{array}{lcl} [1, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{e^{\sqrt{\ln(x)}}} \end{array} \right.$$

Exercice 3

1. B est un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta = \frac{25}{4} - 4\frac{1}{2} \times 2 = \frac{9}{4} > 0$. Il admet donc deux racines distinctes
$$\alpha = \frac{-\frac{5}{2} - \sqrt{\Delta}}{4} = -1 \text{ et } \beta = -\frac{1}{4}$$
(On pouvait aussi remarquer que -1 est racine évidente, et utiliser les relations coefficients-racines sans oublier le rôle du coefficient dominant).

   Le coefficient dominant de B étant 2, $\boxed{\text{sa forme factorisée est } B(X) = 2(X+1)(X+\frac{1}{4}).}$

2. D'après le théorème de la division euclidienne, le reste $R(X)$ de la division euclidienne de $f(X)$ par $B(X)$ est de degré au plus $\deg(B(X)) - 1 = 1$. $\boxed{R(X) \text{ est donc de degré au plus } 1.}$

   De plus, soit Q le quotient de la division euclidienne de $f(X)$ par $B(X)$. L'égalité de division euclidienne est :
$$f(X) = B(X)Q(X) + R(X).$$
   Évaluée en α, et comme $B(\alpha) = 0$, on trouve :
$$f(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) + R(\alpha).$$
   On a donc : $R(-1) = f(-1) = 0^{2n} + (-2)^{2n} = (-1)^{2n}2^{2n} = 2^{2n} = 4^n$. ($n \geq 2$ donc $0^{2n} = 0$.)

   De même, $R(\beta) = R(-\frac{1}{4}) = f(-\frac{1}{4}) = (\frac{3}{4})^{2n} + (\frac{5}{4})^{2n} = \frac{3^{2n} + 5^{2n}}{4^{2n}}$.

   Finalement : $\boxed{R(-1) = 4^n \text{ et } R(-\frac{1}{4}) = \frac{9^n + 25^n}{16^n}.}$

3. $R(X)$ étant de degré au plus 1, il existe deux réels a et b tels que :

$$R(X) = aX + b.$$

D'après la question précédente, a et b vérifient donc :

$$\begin{cases} -a + b = 4^n \\ -\dfrac{1}{4}a + b = \dfrac{9^n + 25^n}{16^n} \end{cases}.$$

Or,

$$\begin{cases} -a & +b = 4^n \\ -\dfrac{1}{4}a & +b = \dfrac{9^n + 25^n}{16^n} \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1}{\iff} \begin{cases} -a & +b = 4^n \\ & \dfrac{3}{4}b = \dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a & +b = 4^n \\ & b = \dfrac{4}{3}(\dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^{n-1}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -(4^n - b) = -(4^n - \dfrac{4}{3}(\dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^{n-1})) = \dfrac{4}{3}(\dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^n) \\ b = \dfrac{4}{3}(\dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^{n-1}) \end{cases}$$

Par conséquent : $\boxed{R(X) = \dfrac{4}{3}(\dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^n)X + \dfrac{4}{3}(\dfrac{9^n + 25^n}{16^n} - 4^{n-1}).}$

4. (a) f étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et f' est également un polynôme. f' est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Par composition avec $t \mapsto t^{2n}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2n(1+x)^{2n-1} + 2n(1-x)^{2n-1} \times (-1) = 2n(1+x)^{2n-1} - 2n(1-x)^{2n-1}.$$

   puis de même:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2n(2n-1)(1+x)^{2n-2} + 2n(2n-1)(1-x)^{2n-2}.$$

   (c) D'après la question précédente,

$$f'(1) = 2n2^{2n-1} + 2n0^{2n-1} = n2^{2n} = n4^n$$

   car $n \geq 2$ donc $2n-1 \geq 3$, donc $0^{2n-1} = 0$. De même, $f''(1) = 2n(2n-1)2^{2n-2} + 0 = n(2n-1)2^{2n-1}$.

   Finalement, $\boxed{f'(1) = n4^n \text{ et } f''(1) = n(2n-1)2^{2n-1}.}$

5. (a) D'après la formule du binôme de Newton ($1 + x = x + 1$):

$$\boxed{\begin{gathered} (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \\ (1-x)^{2n} = (-x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-x)^k \end{gathered}}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   D'après la question précédente puis par linéarité:

$$f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (x^k + (-x)^k).$$

   Or, pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $(-x)^k = \begin{cases} x^k \text{ si } k \text{ pair} \\ -x^k \text{sinon} \end{cases}$. On a donc (1) :

$$x^k + (-x)^k = \begin{cases} 2x^k \text{ si } k \text{ pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Par Chasles pour les rangs pairs et impairs, l'égalité précédente devient :

$$f(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k}(x^k + (-x)^k) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k}(x^k + (-x)^k).$$

D'après (1), on a donc :

$$f(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} 2x^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} 0.$$

Finalement, par théorème sur les sommes portant sur les rangs pairs :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}.}$$

(c) D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}.$$

Dérivons f deux fois à l'aide de cette égalité. Il vient, pour tout réel x :

$$f'(x) = 2\sum_{p=1}^{n} \binom{2n}{2p} 2px^{2p-1}$$

(le terme en $p = 0$ étant constant) puis

$$f''(x) = 2\sum_{p=1}^{n} \binom{2n}{2p} 2p(2p-1)x^{2p-2}$$

Ces égalités appliquées en $x = 1$ donnent :

$$\boxed{\begin{gathered} f'(1) = 2\sum_{p=1}^{n} 2p\binom{2n}{2p}, \text{ et} \\ f''(1) = 2\sum_{p=1}^{n} 2p(2p-1)\binom{2n}{2p}. \end{gathered}}$$

6. *On peux trouver a et b au brouillon et les donner, ou poser un système linéaire sur la copie).* Posons $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$. Alors :

$$a2p(2p-1) + b2p = \frac{1}{4}4p^2 - \frac{1}{4}2p + \frac{1}{4}2p = p^2.$$

Finalement, $\boxed{p^2 = \frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p.}$

7. Le terme en $p = 0$ étant nul,

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}.$$

D'après la question précédente et par linéarité :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{4}2p(2p-1) + \frac{1}{4}2p)\binom{2n}{2p} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n} 2p(2p-1)\binom{2n}{2p} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n} 2p\binom{2n}{2p}.$$

D'après la question 3c) :

$$S_n = \frac{1}{4}\frac{f''(1)}{2} + \frac{1}{4}\frac{f'(1)}{2} = \frac{1}{8}(f''(1) + f'(1)).$$

D'après la question $2c$):

$$S_n = \frac{1}{8}(n(2n-1)2^{2n-1} + n4^n) = \frac{1}{8}(\frac{n(2n-1)}{2}4^n + n4^n) = \frac{n(2n-1)+2n}{16}4^n = n(2n+1)4^{n-2}.$$

Finalement, $\boxed{S_n = n(2n+1)4^{n-2}.}$

Exercice 4

Partie I

1. Un résultat est la donnée de 4 entiers de 1 à 20 dans un ordre, donc d'un 4 uplet d'éléments de $[\![1,20]\!]$.

   $\boxed{\text{L'ensemble des résultats possibles est donc réalisé par l'ensemble } \Omega = [\![1,20]\!]^4.}$

   De plus, par théorème :
   $\boxed{\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}([\![1,20]\!]^4) = \mathrm{Card}([\![1,20]\!])^4 = 20^4 = 16 \cdot 10^4.}$

2. Un résultat formé de faces deux à deux distinctes est caractérisé par les données successives suivantes :

   (a) La donnée de la première face, pour laquelle il y a 20 possibilités.

   (b) La donnée de la seconde face, devant être différente de la première. Il reste donc 19 faces possibles.

   (c) La donnée de la 3e face différente des deux premières, pour laquelle il reste 18 possibilité.

   (d) La donnée de la 4e face, différente des 3 précédentes, pour laquelle il reste 17 possibilités.

   Par principe multiplicatif,

   $\boxed{\text{il y a donc } 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 4!\binom{20}{4} \text{ résultats dont les faces sont deux à deux distinctes.}}$

   On pouvait aussi raisonner par choix successif de la manière suivante :

   - Il y a $\binom{20}{4}$ manières de choisir les 4 faces constituant un résultat aux faces deux à deux distinctes, puis,
   - il y a 4! manières d'ordonner ces faces pour terminer de construire un tel résultat.

   On retrouve $4!\binom{20}{4}$ possibilités.

3. Un résultat comportant les faces 1,5,10 et 15 contient exactement ces faces, dans un certain ordre. Il y a 4! manières d'ordonner ces 4 faces, donc :

   $\boxed{\text{il y a } 4! = 24 \text{ résultats comportant les faces 1,5,10 et 15.}}$

4. (a) Les résultats formés de faces toutes au moins égales à 12 sont les éléments de l'ensemble $[\![12,20]\!]^4$. $\mathrm{Card}([\![12,20]\!]) = 9$ donc, par théorème, $\mathrm{Card}([\![12,20]\!]^4) = 9^4$.

   $\boxed{\text{Il y a } 9^4 \text{ résultats formés de faces toutes au moins égales à 12.}}$

   (b) Soit A l'ensemble des résultats comportant au moins une face inférieure ou égale à 11. Alors :

   $$\bar{A} = [\![12,20]\!]^4.$$

   Par passage au complémentaire, et d'après la question précédente :
   $\boxed{\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(\bar{A}) = 20^4 - 9^4.}$

   (c) Soit $I = \{1,3,5,\dots,19\}$ l'ensemble des nombres impairs de $[\![1,20]\!]$. Alors, $\mathrm{Card}(I) = 10$.

   De plus, I^4 est l'ensemble des résultats ne comportant que des faces impaires. Par théorème, $\mathrm{Card}(I^4) = 10^4$.

   Enfin, soit B l'ensemble des résultats comportant au moins un nombre pair. Alors, $\bar{B} = I^4$ (un résultat ne comporte pas de nombres pairs si et seulement si il ne contient que des faces impaires) donc, par passage au complémentaire :

   $\boxed{\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(I^4) = 20^4 - 10^4 = 10^4(2^4 - 1) = 15 \cdot 10^4.}$

5. (a) Un résultat comportant exactement deux faces 2 est caractérisé par les données successives suivantes :

   - La donnée des deux dés tombant sur la face 2. Il y a 2 dés à choisir parmi les 4 dés possibles, donc $\binom{4}{2} = 6$ possibilités de faire ce choix.
   - Il y a 19 manières de choisir le résultat de chacun des deux autres dés, car celui ci doit être différent de 2. Il y a donc (par principe multiplicatif) $19^2 = 361$ manières de choisir le résultat des deux autres dès.

   Par principe multiplicatif, $\boxed{\text{il y a } 361\binom{4}{2} = 2166 \text{ résultats comportant exactement deux faces 2.}}$

   (b) Par choix successifs, un résultat comportant exactement une face 1 et une face 20 est déterminé par :

   - Le choix du dé tombant sur la face 1. Il y a 4 possibilités pour choisir ce dé.
   - Le choix du dé tombant sur 20. Il reste 3 possibilités pour le choisir.
   - Le choix des résultats des deux autres dés, qui doivent être différents de 1 et 20. Il y a 18 choix possibles pour chaque dés, donc 18^2 possibilités pour choisir ces deux autres résultats (principe multiplicatif).

   Par choix successifs,
   $\boxed{\text{il y a donc } 4 \times 3 \times 18^2 = 12 \times 18^2 \text{ résultats comportant exactement une face 1 et une face 20.}}$

Partie II

6. (a) Soit $k ß n [\![0, r]\!]$. Supposons $k \leq n$, et montrons $r - k > m$.

   $k \leq n$ donc $-k \geq -n$. Par hypothèse, $r > n + m$. Par sommation d'inégalités :

   $$r - k > n + m - n = m.$$

   (Remarque : en sommant une inégalité large et une inégalité stricte, on peut bien conclure une inégalité stricte.) On a bien montré $k \leq n \implies r - k > m$. Finalement :

   $$\boxed{\forall k \in [\![0, r]\!], k \leq n \implies r - k > m.}$$

   (b) Si $r > n + m$, alors $\binom{n+m}{k} = 0$ par définition des coefficients binomiaux.

   Ainsi, pour démontrer l'égalité de Vandermonde, il suffit de démontrer :

   $$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k} = 0.$$

   Posons $S_n = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$. Par la relation de Chalses :

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k} + \sum_{k=n+1}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}.$$

   Or, pour tout $k \geq n + 1$, $\binom{n}{k} = 0$ donc:

   $$\sum_{k=n+1}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k} = \sum_{k=n+1}^{r} 0\binom{m}{n-k} = 0.$$

   De plus, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $r - k > m$ donc $\binom{m}{n-k} = 0$. On a donc de même :

   $$\sum_{k=n+1}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k} = \sum_{k=n+1}^{r} \binom{n}{k} \times 0 = 0.$$

   Finalement, $S_n = 0 + 0 = 0$.

   $\boxed{\text{On a bien démontré l'égalité de Vandermonde dans le cas } r > n + m.}$

(c) Un tirage est déterminé par le choix de r boules parmi les $n+m$ différentes boules de l'urne, sans ordre, donc un tirage est une partie de cardinal r de l'ensemble des $n+m$ boules. Par définition des coefficients binomiaux,

$\boxed{\text{Il y a } \binom{n+m}{r} \text{ tirages possibles.}}$

(d) Supposons d'abord $k \leq n$, de sorte qu'il est possible d'avoir k boules blanches. Un tirage comportant exactement k boules blanches est déterminé par les données successives suivantes :

- La donnée des k numéros inscrits sur les boules blanches tirées. Il y a n numéros possibles, donc $\binom{n}{k}$ manières de choisir ces numéros.
- La donnée des $r-k$ numéros inscrits sur les autres boules tirées, qui sont alors noires. Il y a de même $\binom{m}{r-k}$ manières ces $r-k$ numéros.

Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ résultats comportant exactement k boules blanches.

Si maintenant $k > n$, il n'y a aucun tirage comportant exactement k boules blanches, et on remarque alors $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = 0$ de sorte que la formule tient toujours.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{il y a } \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} \text{ résultats comportant exactement } k \text{ boules blanches.}}$

(e) On procède par cas disjoints. Soit R l'ensemble des tirages possibles, et R_k l'ensemble des tirages comportant exactement k boules blanches, pour $0 \leq k \leq r$. Tout tirage comporte entre 0 et r boules blanches, et les ensembles $R_0, R_1, \ldots, R_r$ sont deux à deux disjoints (un tirage ne pouvant comporter à la fois k et k' boules blanches exactement, si $k \neq k'$). De plus, le nombre de boules blanches obtenues lors d'un tirage est un entier entre 0 et r.
On a donc démontré que R est la réunion disjointe suivante :

$$R = \bigsqcup_{k=0}^{r} R_k.$$

Par réunion disjointe, et d'après la question précédente :

$$\mathrm{Card}(R) = \sum_{k=0}^{r} \mathrm{Card}(R_k) = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}.$$

Mais d'après la question 7(a), $\mathrm{Card}(R) = \binom{n+m}{r}$. Finalement,

$$\boxed{\text{On a bien démontré que si } r \leq n+m, \text{ alors } \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.}$$

Exercice 5

Partie I

1. Le polynôme $1+X+X^2$ est de discriminant $-3 < 0$ donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et est ici de signe constant positif. Ainsi,

   $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R},}$ comme quotient de polynômes (définis sur $\mathbb{R}$) dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Alors, $\boxed{f \text{ est dérivable}}$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}$, comme quotient de polynômes, les polynômes étant dérivables sur leurs domaines de définition $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

   Or, $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc par somme :

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Par quotient :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Enfin, par produit :

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$$

Les mêmes étapes, en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$ partout, donnent aussi :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, par quotient :

$$f'(x) = \frac{1(1+x+x^2) - x(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}.$$

Or, on a vu question 1 que $1+x+x^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$. Mais :

$$1-x^2>0 \iff x^2<1 \iff -1<x<1.$$

On en tire le tableau de variation suivant, complété avec les limites précédentes et les valeurs $f(1)$ et $f(-1)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

4. (a) La tangente (T) de la courbe de f en 0 a pour équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x-0)$$

Or, $f(0)=0$ et $f'(0)=1$.

$$\boxed{\text{Une équation de } (T) \text{ est donc } y = x.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \le x &\iff \frac{x}{1+x+x^2} - x \le 0 \\ &\iff \frac{x - x(1+x+x^2)}{1+x+x^2} \le 0 \\ &\overset{(1)}{\iff} -x^2 - x^3 \le 0 \\ &\iff -x^2(1+x) \le 0 \end{aligned}$$

(1) : car on a vu que $1+x+x^2>0$.

Un tableau de signe (à faire) formé par $-x^2$, $1+x$ puis $-x^2(1+x)$ montre alors :

$$-x^2(1+x) \le 0 \iff x \ge -1.$$

et le cas d'égalité est réalisé en $x=-1$ et $x=0$.

Finalement,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solution de } f(x) \le x \text{ est } [-1,+\infty[.}$$

La courbe (C_f) de f admet pour équation $y=f(x)$, et sa tangente (T) en 0 admet pour équation $y=x$. Dans la question précédente, on a montré :

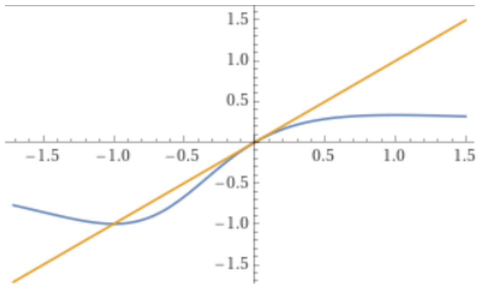
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \le x \iff x \in [-1,+\infty[.$$

Cela montre donc :

$\boxed{\text{La courbe } (C_f) \text{ de } f \text{ est au dessus de } (T) \text{ sur }]-\infty, 1] \text{ et en dessous de } (T) \text{ sur } [1, +\infty[.}$

Le cas d'égalité vu en question précédente montre que (C_f) et (T) s'intersectent en leurs points d'abscisse -1 et 0.

(c) *Il faut prendre en compte la question précédente et le tableau de variation (et bien faire apparaitre la tangence). Rajoutez les valeurs en -1 et 1 sur votre graphique.*



5.
```
#modules
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
listeX=np.linspace(-10,10,500)          #liste des abscisse
listeY=[x/(1+x+x**2) for x in listeX]          #liste de ordonnées
plt.plot(listeX,listeY)          #tracé de (Cf)
plt.plot(listeX,listeX)          #tracé de (T)
plt.show()          #affichage
```

Partie II

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}}$$

Or, $n + 1 + \frac{1}{n} \geq n + 1 > 0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Finalement, on a bien démontré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}.}$

7. $\boxed{\text{Montrons par récurrence } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \text{"}0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}\text{"}.}$

Initialisation : l'initialisation est claire, car $u_1 = 1$ et $0 \leq 1 \leq \frac{1}{1}$, ce qui démontre $P(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$, et montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Mais $n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq 1$ donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \leq 1.$$

La fonction f étant croissante sur $[-1, 1]$ (d'après la question 3) :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(\frac{1}{n}).$$

D'après la question précédente, et comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$. On a de plus $f(0) = 0$. Par transitivité :

$$0 \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

8. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

De plus, $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

9.
```
#Définition de f
def f(x):
        return(x/(1+x+x**2))
#Calcul demandé
u=1 #u(1)=1
n=1
while u > 10**(-4):
        u=f(u)
        n+=1
print(n)
```

Partie III

10. $v_2 = f(v_1) = \frac{-2}{1+(-2)+(-2)^2} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$. Ainsi : $\boxed{v_2 = -\frac{2}{3} \in [-1, 0].}$

11. f étant croissante sur $[-1, 0]$ (question 3), on a :

$$\forall x \in [-1, 0], f(-1) \leq f(x) \leq f(0).$$

$f(-1) = -1$ et $f(0) = 0$, donc ceci démontre (1) : $f([-1, 0]) \subset [-1, 0]$.

$\boxed{\text{Montrons par récurrence } \forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0.}$

L'initialisation est démontrée dans la question 11.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ tel que $-1 \leq v_n \leq 0$. Montrons $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$.

Par hypothèse de récurrence, $v_n \in [-1, 0]$. Par (1), $v_{n+1} = f(v_n) \in [-1, 0]$. Ceci démontre bien

$$-1 \leq v_{n+1} \leq 0$$

d'où l'hérédité.

12. Soit $n \geq 2$. On a démontré dans la question précédente :

$$v_n \in [-1, 0].$$

Or, d'après la question (b) :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, f(x) \leq x.$$

En particulier :

$$v_{n+1} = f(v_n) \leq v_n.$$

Finalement, $\forall n \geq 2, v_{n+1} \leq v_n$:

$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante.}}$

13. D'après la question précédente, $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. D'après la question 12, cette même suite est minorée par -1. Par le théorème de la limite monotone :

$\boxed{(v_n)_{n\geq 2} \text{ converge.}}$

Enfin, la convergence d'une suite ne dépendant pas de ses premiers termes :

$\boxed{\text{la suite } v = (v_n)_{n\geq 1} \text{ converge également.}}$

14. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de v (question précédente).

Alors, par continuité de f sur $\mathbb{R}$, $v_{n+1} = f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$.

Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(v_n) = v_{n+1}$ donc :

$$f(v_n) = v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

La suite $(v_{n+1})_{n\geq 1}$ converge donc vers l et $f(l)$. Par unicité des limites :

$$l = f(l).$$

D'après le cas d'égalité traité à la question 4b), $f(l) = l \iff l = 0$ ou $l = -1$. Donc lß$n\{-1, 0\}$.

Or, par décroissance de $(v_n)_{n\geq 2}$:

$$\forall n \geq 2, v_n \leq v_2.$$

Par passage à la limite des inégalités :

$$l \leq v_2 = -\frac{2}{3}.$$

Mais on a démontré $l = 0$ ou $l = -1$. On a donc nécessairement $l = -1$, d'où :

$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.}$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = -1 \iff x = -(1 + x + x^2) \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1.$$

$\boxed{\text{L'unique solution de } f(x) = -1 \text{ est } -1.}$

16. *On peut procéder immédiatement par récurrence avec la question précédente. C'est plus naturel pour vous, et une fois l'idée de procéder par récurrence trouvée, ce n'est pas très difficile. Voici une variante instructive.* Supposons par l'absurde qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $v_n = -1$. Soit n_0 le plus petit des entiers :

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* | v_n = -1\}$$

(cet entier est bien défini car l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* | v_n = -1\}$ est non vide par hypothèse, et tout ensemble d'entiers naturels admet un plus petit élément).

On sait que $n_0 \geq 2$ car $v_1 \neq -1$. Donc $v_{n_0} = f(v_{n_0-1}) = -1$.

Ainsi, v_{n_0-1} est solution de l'équation $f(x) = -1$. D'après la question précédente, $v_{n_0-1} = -1$.

On aurait donc $v_{n_0-1} = -1$ et $1 \leq n_0 - 1 < n_0$. Ceci contredit le choix de n_0, défini comme le plus petit entier n tel que $v_n = -1$.

C'est absurde, ce qui démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \neq -1.$$

— *Fin du corrigé* —