Programme de colle n^o 15 : Probabilités sur un univers fini.

*Semaine du lundi **22 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Probabilités conditionnelles (suite)

15.1 Notion de probabilité conditionnelle. Interprétation. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et A un événement de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$. Les propriétés vues pour les probabilités sont donc vraies pour les probabilité conditionnelle. Interprétation d'énoncés en terme de probabilités conditionnelles ($\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité de réalisation de B sachant l'événement A réalisé).

15.2 Formule des probabilités composées au rang 2, formule des probabilités composées. Exemple d'utilisation pour des tirages sans remise dans une urne.

15.3 La formule des probabilités totale avec conditionnement. Cas particulier avec un système complet d'événement de la forme $(A, \bar{A})$. Exemples d'utilisation dans des expériences aléatoires en deux étapes.

15.4 Formules de Bayes. Exemples d'utilisation et cas particulier où l'on utilise une formule des probabilités totales avec un SCE de la forme $(A, \bar{A})$ pour le dénominateur apparaissant dans la formule de Bayes.

Indépendance

15.5 Événements indépendants (pour une probabilité). Caractérisation de l'indépendance utilisant une probabilité conditionnelle. Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour A et $\bar{B}$.

15.6 Indépendance deux à deux d'événements, indépendance mutuelle d'événements. Si $A_1, \ldots, A_m$ sont des événements mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse. Stabilité par passage au complémentaire de ces deux notions d'indépendance.

Python

15.7 Algorithme glouton : principe général, exemple sur un problème de rendu de monnaie.

Quelques questions de cours

1. Les questions de cours de la semaine dernière sont toujours au cœur du programme de colle de cette semaine.
2. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales, avec et sans conditionnement.
3. Énoncer la formule des probabilités composées. La démontrer.
4. Énoncer la formule des probabilités composées. L'utiliser pour déterminer la probabilité de tirer 3 boules blanches si on tire, successivement et sans remise, 3 boules dans une urne contenant 4 boules blanches et 8 boules noires.
5. Une urne contient 100 dés dont 20 ne contiennent que des faces "1", les 80 autres étant des dés équilibrés classiques. On tire un dé au hasard dans cette urne, et on le lance. Déterminer la probabilité d'obtenir une face "1".
6. Énoncer la formule de Bayes (les deux formes données par la proposition 42). Une urne contient deux dés : l'un est équilibré, l'autre n'a que des faces 6. On tire un dé au hasard, on le lance, et on obtient 6. Quelle est la probabilité d'avoir tiré le dé truqué?
7. Définir la notion d'indépendance de deux événements (pour une probabilité). Énoncer et démontrer la proposition caractérisant l'indépendance à l'aide de probabilités conditionnelles.
8. Montrer que si A et B sont deux événements indépendants (pour une probabilité), alors il en est de même de A et $\bar{B}$.
9. Définir les notions d'indépendance deux à deux et d'indépendance mutuelle d'événements (pour une probabilité). Montrer que si A_1, A_2 et A_3 sont des événements mutuellement indépendants, alors il en est de même de A_1, A_2 et $\bar{A}_3$.