# Programme de colle n$^o$ 16 : Calcul matriciel.

*Semaine du lundi **29 janvier**.*

*Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.*

*On s'assurera pendant la colle que les élèves sont capable de poser un produit matriciel avec une matrice ayant au moins une dimension supérieure ou égale à 3.*

## Matrices et opérations

**16.1** Notion de matrice, taille d'une matrice, ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matricées réelles de taille $(n, p)$, coefficients d'une matrice. Deux matrices sont égales ssi elles ont même taille et leurs coefficients de même indice sont égaux entre eux. Matrice nulle. Notion de matrice carrée, matrice identité de taille $n$, coefficients diagonaux d'une matrice carrée. Notion de matrice ligne, colonne. Ligne ou colonne d'une matrice.

**16.2** Somme de matrices. Associativité, commutativité, la matrice nulle est neutre pour la somme. Opposée d'une matrice. Multiplication d'une matrice par un réel, propriétés. Produit matriciel, le produit matriciel n'est pas commutatif. Propriétés du produit matriciel : associativité, distributivité, compatibilité entre le produit et le produit par un réel. Multiplication par une matrice identité, par une matrice nulle. Les identités remarquables sont à priori fausses pour le calcul matriciel. La règle du produit nul est fausse pour les matrices. On ne peut simplifier une matrice dans l'égalité d'un produit matriciel.

**16.3** Transposée d'une matrice. Propriétés (${}^t({}^tA) = A$, compatibilité avec le produit par un réel, avec le produit matriciel (oubliée dans le cours, donné en annexe).

## Matrices carrées

**16.4** Le produit et la somme de deux matrices carrées de taille $n$ est une matrice de taille $n$. Puissance d'une matrice carrée. Propriétés des puissances.

**16.5** Matrices qui commutent. Une matrice de la forme $\lambda I_n$, pour $\lambda$ réel, commute avec toute matrice. Si $A$ et $B$ commutent, alors $A^k$ et $B^l$ commutent pour tous entiers naturels $k$ et $l$. Identités remarquables, binôme de Newton et puissance d'un produit pour deux matrices qui commutent.

**16.6** Matrices triangulaires et diagonales. Ces formes sont stables par somme et produit (donc aussi par puissance). Produit de matrices diagonales, coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), alors ${}^tA$ est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

**16.7** Matrices symétriques et antisymétriques : définition.

## Matrices carrées inversibles

**16.8** Notion de matrice inversible. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors il existe une unique matrice $B$ telle que $AB = BA = I_n$, appelée l'inverse de $A$ et notée $A^{-1}$. Proposition (admise) caractérisant l'inversibilité à l'aide d'un inverse à gauche ou à droite. Inversibilité de l'inverse d'une matrice inversible.

**16.9** Inverse d'un produit de matrices inversibles, de la transposée d'une matrice inversible, d'une puissance d'une matrice inversible.

**Python**
**16.10** Algorithme glouton : problèmes d'allocations de salles.

**Quelques questions de cours**

1. Énoncer les règles de compatibilité entre la multiplication par un réel, le produit des réels et la somme de matrices. En démontrer 2 au choix du colleur.
2. Définir le produit matriciel. Montrer que le produit matriciel n'est pas commutatif (même lorsque les deux produits sont définis). Montrer que pour tous entiers $n$ et $p$ supérieurs à 1 : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), I_n A = A I_p = A$.
3. Énoncer les propriétés du produit matriciel. En démontrer 1 ou 2, au choix du colleur (selon la longueur).
4. Définir la transposée d'une matrice, transposer une matrice au choix du colleur. Énoncer les propriétés de la transposition. Démontrer la règle de compatibilité avec la somme.
5. Définir (en contextualisant) : "les matrices $A$ et $B$ commutent". Énoncer les proposition 35 et 36, relatives aux règles de calcul pour les matrices qui commutent. Démontrer la règle donnant la puissance d'un produit de matrices qui commutent, et une des trois identité remarquable "de degré 2".
6. Définir la notion de matrice triangulaire (supérieure, inférieure) et diagonale. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.
7. Définir la notion de matrice inversible. Énoncer la proposition et définition définissant l'inverse d'une matrice inversible. Énoncer la proposition 54 (propriétés de l'inverse). Faire 1 ou 2 démonstrations, au choix du colleur.
8. Écrire un code Python permettant de résoudre le problème d'allocation d'une salle face à des demandes de créneaux données sous la forme d'une liste de demandes, une demande étant une liste de la forme :

   $$[\text{"}\mathtt{NomDemande}\text{"}, \mathtt{HeureDebut}, \mathtt{HeureFin}].$$

   On appliquera un algorithme glouton visant à maximiser le nombre de d'acceptations, et classant pour cela ces demandes par heure de fin croissante.
   On expliquera en quoi l'algorithme proposé est un algorithme glouton.