Programme de colle n^o 17 : Matrices inversibles, continuité sur un intervalle.

*Semaine du lundi **5 février**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Matrices inversibles

17.1 Notion de matrice inversible. Proposition et définition définissant l'inverse d'une matrice inversible. Une matrice carrée est inversible ssi elle admet un inverse à gauche (resp. à droite) (admis).

17.2 Inverse de l'inverse, d'un produit, de la transposée ou d'une puissance de matrice(s) inversible(s). Si A et P sont inversibles, alors PAP^{-1} l'est aussi d'inverse $PA^{-1}P^{-1}$ (à redémontrer en une ligne en cas d'utilisation). Quelques résultats obtenus "trivialement" par multiplication par l'inverse, à savoir refaire : toute matrice inversible est simplifiable à gauche ou à droite; si A est inversible, alors $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ (X, Y matrices convenables); si A et B sont non nulles et telles que AB est nulle, alors A et B ne sont pas inversibles.

17.3 Deux cas simples : Déterminant et CNS d'inversibilité d'une matrice $(2, 2)$, CNS d'inversibilité d'une matrices diagonales. Notation $P(A)$ où A est une matrice carrée et P polynôme. Notion (HP) de polynôme annulateur d'une matrice carrée. Exemple d'utilisation d'un polynôme annulateur pour démontrer l'inversibilité d'une matrice.

Systèmes linéaires, matrices et inversibilité

17.4 Matrice associée à un système linéaire, forme matricielle d'un système linéaire, système matriciel associé à une équation matricielle de la forme $AX = Y$ (d'inconnue X, X et Y étant des matrices colonnes convenables). Correspondance entre les solutions d'un système linéaire et de sa forme matricielle (prop 67).

17.5 Rappels sur les systèmes de Cramer. Le caractère "de Cramer" d'un système linéaire (carré) ne dépend pas de son second membre. Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si la matrice qui lui est associée est inversible. Étude de l'inversibilité d'une matrice carrée par la résolution d'un système linéaire à second membre indéterminé. Cas particulier des matrices triangulaires (une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, et son inverse est alors triangulaire "de même type").

Fonctions continues sur un intervalle

17.6 Rappels sur la continuité en un point, continuité sur un intervalle. Continuité et opérations.

17.7 Le théorème des valeurs intermédiaires. Autres formes de celui-ci : toute fonction continue changeant de signe sur un intervalle s'y annule. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de matrice inversible. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant l'inverse d'une matrice inversible. Montrer que l'inverse d'une matrice inversible est inversible, et donner son inverse.
2. Énoncer et démontrer les propriétés du passage à l'inverse (prop. 53, 54).
3. Énoncer et démontrer les propositions 56 et le résultat de l'exercice 57, relatifs à la simplifiabilité à droite et à gauche d'une matrice inversible, à la résolution d'une équation matricielle type $AX = Y$, et aux matrices non nulles de produit matriciel nul.
4. Énoncer et démontrer la CNS d'inversibilité d'une matrice diagonale.
5. Définir le déterminant d'une matrice $(2, 2)$. Énoncer et démontrer la CNS d'inversibilité d'une matrice $(2, 2)$.
6. Définir la matrice associée à un système linéaire, la forme matricielle d'un système linéaire et le système linéaire associé à une équation matricielle type $AX = Y$. Énoncer et démontrer la proposition 67, établissant une correspondance entre les solutions de ces équations.
7. Énoncer et démontrer le théorème 71, liant les système de Cramer aux matrices inversibles. Pour le sens plus difficile, afin de gagner du temps, on exposera proprement les deux principes utilisés par la preuve, et on expliquera plus brièvement comment ceux-ci sont utilisés.
8. Déterminer si la matrice $(3, 3)$ suivante est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.