# Programme de colle n$^o$ 18 : Continuité, graphes.

*Semaine du lundi **26 février**.*

*Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.*

## Le théorème des valeurs intermédiaires

**18.1** Le théorème des valeurs intermédiaires. Versions alternatives : si une fonction continue change de signe sur un intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle. Caractrisation (admise) des intervalles. Version HP du TVI : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Démonstration par dichotomie.

*Caractérisation admise : $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ssi :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall c \in [a,b], c \in I.$$

**18.2** Borne supérieure et inférieure d'une fonction sur un intervalle. Cas d'une fonction admettant un maximum ou un minimum. Version "inf-sup" du théorème des valeurs intermédiaires (HP). Tout polynôme de degré impair admet une racine.

*Les notions de bornes supérieures et inférieures sont hors programme. Elles ont été présentées pour démontrer les théorèmes du cours, mais toute utilisation est à proscrire.*

**18.3** Continuité sur un segment : toute fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum (admis). Théorème des bornes atteintes : si $f$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors elle admet un maximum et un minimum sur$[a,b]$ et $f([a,b]) = [\min\limits_{[a,b]}(f), \max\limits_{[a,b]}(f)]$.

## Le théorème de la bijection monotone.

**18.4** Le théorème de la bijection monotone. Utilisation conjointe de la proposition (34) permettant de déterminer l'ensemble image.

**18.5** Graphe de la réciproque d'une fonction bijective.

## Généralités sur les graphes

**18.6** Graphe non orienté : définition, somme, arêtes, sommets adjacents, isolés, boucle, graphe simple, ordre d'un graphe, extrémités d'une arête, degré d'un sommet.

*Tous les graphes considérés dans ce chapitre sont sans multi-arêtes.*

**18.7** Le lemme des poignées de mains. Tout graphe non orienté a un nombre pair de sommets de degré impair.

**18.8** Chaîne d'un graphe non orienté. Sommets reliés par une chaîne, graphe connexe.

**18.9** Graphes orientés : définition, ordre, boucle, simplicité, origine (ou extémité sortante/initiale) et but (ou extrémité entrante/finale) d'une arête, degré sortant/entrant/total d'un sommet. Lemme des poignées de mains pour un graphe orienté. Chemin et connexité d'un graphe orienté.

*La notion de connexité au programme pour les graphes orientés est la forte connexité.*

## Matrices d'adjacence et connexité

**18.10** Matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés. Symétrie de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté. Degrés et sommes des coefficients d'une même ligne ou colonne.

**18.11** Si $M$ est la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) à sommets numérotés, alors le coefficients d'indice $(i,j)$ de $M^k$ est le nombre de chaînes/chemins de longueur $k$ du $i$-ième sommet au $j$-ième sommet. Un graphe (orienté ou non) $\mathcal{G}$ d'ordre $n$ de matrice d'adjacence $M$ est connexe ssi $I_n + M + \ldots + M^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

## Quelques notions supplémentaires

**18.12** Un exemple de démonstration par récurrence forte sur l'ordre du graphe. Notion de graphe pondéré, de graphe eulérien (definitions : chaîne fermé, cycle et cycle eulérien), théorème d'Euler HP admis (un graphe connexe est eulérien ssi ses sommets sont tous d'ordre pair). Notion de graphe bipartis.

**Quelques questions de cours**

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Donner les deux grandes étapes de sa démonstration (construction de suites telles que... puis démonstration qu'elles convergent vers un antécédent recherché), expliquer graphiquement la première étape et démontrer la 2e étape.
2. Énoncer et démontrer la proposition 26 (TVI avec bornes inférieures et supérieures, HP).
3. Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.
4. Énoncer et démontrer le théorème de la bijection monotone (théorème 33).
5. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = \dfrac{2x^2}{1+x}$. Montrer que $h$ est bijective, et déterminer la limite de $\dfrac{h^{-1}(x)}{x}$ en $+\infty$.

   ***Toutes les questions relatives aux graphes peuvent être posées, au choix du colleur, pour un graphe orienté ou non orienté.***
6. Soit $\mathcal{G}$ le graphe suivant... . Définir ensemblistement $\mathcal{G}$, définir la (ou les) notion(s) de degré pour un sommet de $\mathcal{G}$. Énoncer et démontrer le lemme des poignées de mains.
7. Définir la notion de chaîne (resp. chemin) d'un graphe non orienté (resp. orienté). Définir la notion de graphe connexe.
8. Définir la notion de matrice d'adjacence d'un graphe. Énoncer et démontrer l'interprétation de $M^k$ en terme de chaînes/chemins, où $M$ est une matrice d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$.
9. Énoncer et démontrer le théorème permettant de caractériser la connexité d'un graphe à l'aide de sa matrice d'adjacence.
10. Définir les notion de graphe bipartis et de graphe eulériens. Montrer que le graphe complet $K_4$ d'ordre 4 n'est pas bipartis. Donner un graphe eulérien.