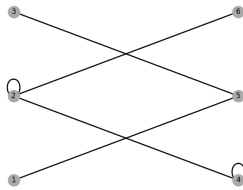


## Pour commencer

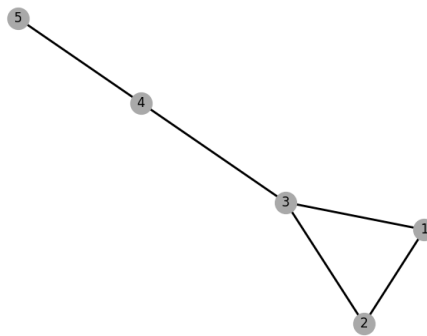
### Exercice 1 *Vrai ou faux?*

- (a) Un graphe est non connexe si et seulement si il a un sommet isolé.
- (b) Dans un groupe de 20 élèves, il est possible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, que neuf d'entre eux aient exactement 4 amis, et que quatre d'entre eux aient exactement 7 amis.
- (c) Le graphe suivant est connexe :



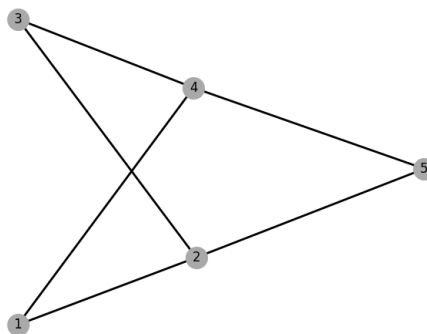
- (d) Le graphe de la question précédente est bipartis.
- (e) Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours deux sommets de même degré.

### Exercice 2 Considérons le graphe représenté ci-dessous.



- (a) donner la matrice d'adjacence de ce graphe.
- (b) Combien de chemins de longueur 4 existe-t-il entre les sommets 1 et 4? Lister ces chemins.
- (c) Démontrer par un calcul que ce graphe est connexe.

### Exercice 3 Considérons le graphe représenté ci-dessous.



- (a) Donner la matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe.
- (b) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^{2k+1} = 6^k M$ .
- (c) En déduire le nombre de chemins de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3.

**Exercice 4** Soit  $\mathcal{G} = (S, A)$  un graphe orienté, et  $M$  une matrice d'adjacence de  $\mathcal{G}$ .

- (a) On suppose qu'il existe un entier naturel  $d$  tel que  $M^d$  est à coefficients strictement positifs. Montrer que  $\mathcal{G}$  est connexe.
- (b) On suppose  $S = \llbracket 1, 5 \rrbracket$  et  $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 1), (5, 4)\}$ .
  - (i) Représenter graphiquement  $\mathcal{G}$ .
  - (ii) Déterminer la matrice d'adjacence de  $\mathcal{G}$ .
  - (iii) Calculer  $M^3$ , en déduire que  $\mathcal{G}$  est connexe.

**Exercice 5** Soit  $\mathcal{G} = (S, A)$  un graphe simple non orienté d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  possédant au moins une arête.

- (a) On suppose qu'il n'existe aucun cycle dans  $\mathcal{G}$ . Montrer que  $\mathcal{G}$  a au moins deux sommets de degré 1. *On pourra admettre l'existence d'une chaîne sans répétition d'arêtes de longueur maximale.*
- (b) Montrer par récurrence sur  $n$  que si  $\mathcal{G}$  n'a aucun cycle, alors  $\text{Card}(A) < n$ .
- (c) On suppose qu'il existe un unique cycle dans  $\mathcal{G}$ . Montrer  $\text{Card}(A) \leq n$ .

**Exercice 6** *Plus difficile.* Soit  $\mathcal{G} = (S, A)$  un graphe fini d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $\delta = \min_{s \in S} (\deg(s))$  le plus petit des degrés des sommets de  $\mathcal{G}$ .

- (a) Montrer que si  $\delta \geq 2$ , alors  $\text{Card}(A) \geq n$ .
- (b) En déduire que si  $\mathcal{G}$  est connexe, alors  $\text{Card}(A) \geq n - 1$ .
- (c) Donner un exemple de graphe  $\mathcal{G} = (S, A)$  connexe tel que  $\text{Card}(A) = n - 1$ .
- (d) Montrer que si  $\text{Card}(A) = n - 1$  et  $\mathcal{G}$  n'a aucun cycle, alors  $\mathcal{G}$  est connexe. On pourra utiliser un résultat de l'exercice précédent.

**Exercice 7** Soit  $\mathcal{G}$  un graphe non orienté, simple, d'ordre pair  $2p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ). On suppose que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à  $p$ . Montrer que  $\mathcal{G}$  est connexe.

*On montrera que deux sommets quelconques de  $\mathcal{G}$  sont reliés par une chaîne de longueur au plus 2.*

**Exercice 8** *Penser au théorème d'Euler* Montrer que si  $\mathcal{G}$  est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair, alors le graphe obtenu en retirant une arête à  $\mathcal{G}$  est toujours connexe.

**Exercice 9** *Exercice du cours. La question (e) est importante (gros calcul classique).* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $K_n$  le graphe complet d'ordre  $n$  de sommets  $1, 2, \dots, n$ .

- (a) Quel est le nombre total d'arêtes de  $K_n$  ?
- (b) Donner la matrice d'adjacence  $M$  de  $K_n$ .
- (c) Donner une matrice  $J$  telle que  $M = J - I_n$ .
- (d) Calculer  $J^p$  pour tout entier naturel  $p$ .
- (e) En déduire le calcul de  $M^p$ , pour tout entier naturel  $p$ .
- (f) Donner le nombre de chaînes de longueur  $p$  de  $i$  vers  $j$  dans  $K_n$ , en fonction de  $i$  et  $j$ .

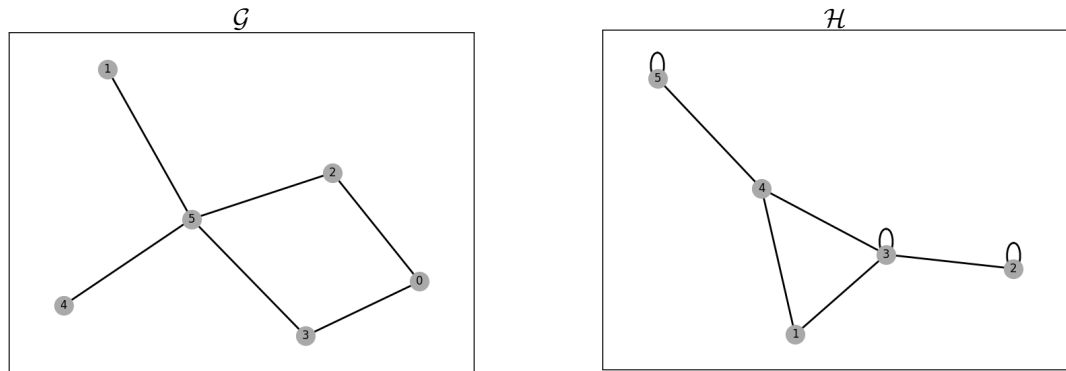
**Exercice 10** Tous les graphes considérés dans cet exercice sont non orientés.

Pour tout graphe non orienté  $\mathcal{G} = (S, A)$ , on appelle *graphe des arêtes complémentaires* le graphe noté  $\bar{\mathcal{G}}$  donné par :

$$\bar{\mathcal{G}} = (S, A')$$

où  $A' = \{\{u, v\} | (u, v) \in S^2 \text{ tel que } \{u, v\} \notin A\}$ .

- (a) (i) Représenter le graphe des arêtes complémentaires de chaque graphe représenté ci-dessous.



- (ii) Soit  $\mathcal{G}$  un graphe non orienté. Notons  $n$  son ordre et fixons une numérotation  $s_1, \dots, s_n$  des sommets de  $\mathcal{G}$ . On note  $M$  la matrice d'adjacence obtenue pour  $\mathcal{G}$ , et  $M'$  la matrice d'adjacence ainsi obtenue pour  $\bar{\mathcal{G}}$ . Déterminer  $M + M'$ .
- (b) Le but des sous questions suivantes est de démontrer le théorème suivant : dans un groupe de 6 personnes dont certaines sont amies et d'autres non ("être ami" étant symétrique), il existe systématiquement trois personnes qui sont ou bien toutes amies entre elles, ou bien toutes non-amies entre elles.
- On considère donc un tel groupe de 6 personnes, numérotées de 1 à 6, et on note  $\mathcal{G}$  le graphe donnant les relations d'amitié entre ces personnes (les sommets sont les entiers de 1 à 6, et il y a une arête entre les sommets  $i$  et  $j$  ssi les personnes  $i$  et  $j$  sont amies).
- (i) Formuler, en terme de propriété de graphe, la propriété, notée  $\mathcal{P}$ , qu'on doit démontrer sur le graphe  $\mathcal{G}$  pour prouver le théorème ci-dessus.
- (ii) Montrer que  $\mathcal{G}$  vérifie  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\bar{\mathcal{G}}$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- (iii) Soit  $s$  un sommet de  $\mathcal{G}$ . Montrer que :  $s$  a au moins trois voisins dans  $\mathcal{G}$ , ou  $s$  a au moins trois voisins dans  $\bar{\mathcal{G}}$ .
- (iv) Conclure à l'aide d'une disjonction des cas.
- (v) Montrer qu'il existe un graphe d'ordre 5 ne vérifiant pas la propriété  $\mathcal{P}$ .
- (vi) La propriété  $\mathcal{P}$  est-elle vérifiée par tout graphe d'ordre plus grand que 6?

**Exercice 11** Soit  $\mathcal{G} = (S, A)$  un graphe simple non orienté et connexe d'ordre  $n \geq 2$ .

Si  $s$  et  $t$  sont deux sommets de  $\mathcal{G}$ , on appelle *distance* de  $s$  à  $t$  l'entier noté  $d(s, t)$  donné par la plus petite longueur d'une chaîne de  $\mathcal{G}$  de  $s$  vers  $t$ . On a en particulier  $d(s, s) = 0$ .

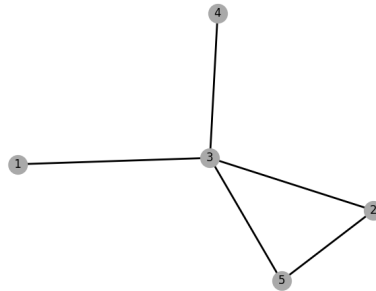
Pour tout  $s \in S$ , on appelle *excentricité* de  $s$  dans  $\mathcal{G}$  l'entier  $e(s) = \max_{t \in S} d(s, t)$ .

On appelle *diamètre* du graphe  $\mathcal{G}$  l'entier :  $D_{\mathcal{G}} = \max_{s \in S} e(s)$ .

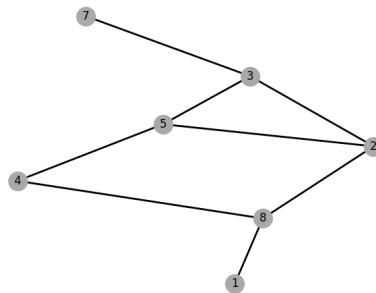
On appelle *rayon* du graphe  $\mathcal{G}$  l'entier  $\rho_{\mathcal{G}} = \min_{s \in S} e(s)$ .

On appelle *centre* du graphe  $\mathcal{G}$  l'ensemble :  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} = \{s \in S, e(s) = \rho_{\mathcal{G}}\}$ .

- (a) On considère le graphe  $\mathcal{G}$  ci dessous. Déterminer  $e(s)$  pour chaque sommet  $s$  de  $\mathcal{G}$ . En déduire  $D_{\mathcal{G}}$ ,  $\rho_{\mathcal{G}}$  et  $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ .



- (b) Même question pour le graphe ci-dessous.



- (c) On revient au cas général. Montrer que pour tous sommets  $s$  et  $g$  :

- (i)  $d(s, t) = 0 \iff s = t$ .
- (ii)  $d(s, t) = d(t, s)$ .
- (iii) Pour tout sommet  $u$ ,  $d(s, t) \leq d(s, u) + d(u, t)$ .

On dit que  $d$  est une distance sur l'ensemble des sommets.

- (d) A quelle condition nécessaire et suffisante sur  $\mathcal{G}$  as-t-on  $D_{\mathcal{G}} = 1$  ?
- (e) Montrer  $D_{\mathcal{G}} \leq 2\rho_{\mathcal{G}}$ .