Chapitre 15 : Séries numériques

ECG1 A, Lycée Hoche

L'idée est de formaliser la notion de somme infinie. On utilise la notion de limite pour donner un sens à des égalités (HP) comme :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

ou montrer que certaines sommes infinies ne sont pas bien définies. Par exemple, la fameuse série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, et la somme

$$1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots$$

n'a pas de limite du tout (à chaque ajout d'un terme, la valeur de la somme échange sa valeur entre 0 et 1, et la somme ne se stabilise donc pas vers une valeur finie).

I. Généralités sur les séries numériques

1. Série numérique

Définition 1. Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle.
On appelle *série de terme général* u_k, et on note $\sum_{k\geq n_0} u_k$, la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$\forall n\geq n_0, S_n=\sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Pour tout entier $n\geq n_0$, le réel $S_n=\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelé *la somme partielle d'indice* n de la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$.

Remarque. (*i*) La série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est donc une suite, la suite de ses sommes partielles. Par exemple, la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$, appelée la *série harmonique*, est la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ où pour tout entier $n\geq 1$, S_n est le réel :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Par exemple, $S_2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, et $S_{100}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100}$ vaut environ $5,18$.

(*ii*) Dans la notation $\sum_{k\geq n_0} u_k$ introduite ci-dessus, k est une variable muette (ou locale). Cette notation est donc bien définie si et seulement si k n'est pas déjà fixé, et dans ce cas elle a le même sens que $\sum_{l\geq n_0} u_l$ (si l n'est pas non plus déjà fixé).

(*iii*) On trouve parfois la notation $\sum_k u_k$ ou $\sum u_k$ pour désigner $\sum_{k\geq n_0} u_k$, à condition que le rang du premier terme de la suite u soit clair.

Exemple 2. (*i*) La série $\sum_{k\geq 1} 1$ est la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. La somme partielle d'indice n de $\sum_{k\geq 1} 1$ vaut donc n. Ainsi, $\sum_{k\geq 1} 1$ est une suite qui tend vers $+\infty$: on dira que la série $\sum_{k\geq 1} 1$ diverge.

(*ii*) Considérons la série $S = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$. Alors, $S = (S_n)_{n\geq 0}$ où pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. On reconnait en S_n une somme géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ donc :

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Sans forme indéterminée :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

On dira que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$ converge, et a pour somme 2. Cela formalise l'égalité :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots = 2.$$

2. Nature d'une série

Étudier la nature d'une série, c'est déterminer si c'est une série convergente ou divergente, selon la définition ci-dessous.

Définition 3. Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle. Notons S_n la somme partielle d'indice n de $\sum_{k\geq n_0} u_k$, pour tout entier $n \geq n_0$.

(*i*) On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ *converge* si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge. Autrement dit, $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge si et seulement si la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle *somme de la série* $\sum_{k\geq n_0} u_k$ le réel noté $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ donné par :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

(*ii*) On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ *diverge* si elle ne converge pas.

Remarque. Si vous êtes à l'aise avec la nature des objets, la définition de "$\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge" n'en est pas vraiment une (cette série converge si elle converge en tant que suite, et par définition c'est une suite).

Exemple 4. (*i*) Montrons que $\sum_{k\geq 0} k$ diverge.

Notons, pour tout entier naturel n, S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

donc sans forme indéterminée, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, $(S_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas : $\sum_{k\geq 0} k$ diverge.

(*ii*) Montrons que $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{3^k}$ converge. Pour tout entier naturel n, notons S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

(on reconnait une somme géométrique de raison $\frac{1}{3} \neq 1$).

Ainsi, $S_n = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^{n+1}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$.

Par définition, $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{3^k}$ converge, et a pour somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}.$$

(*iii*) Le résultat de l'exercice suivant (en fait déjà vu lors du chapitre sur les suites réelles) est très important : **la série harmonique diverge**.

Exercice 5. (*i*) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(\frac{k+1}{k}) \leq \frac{1}{k}$.

(*ii*) En déduire que $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(*iii*) En déduire que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Remarque. La technique employée ici (utiliser une comparaison pour étudier la nature d'une série) est très commune, et fait l'objet d'un théorème en partie III.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle (où $n_0 \in \mathbb{N}$).

(*i*) Vous devez faire particulièrement **attention** à la terminologie, et à ne pas confondre les différents objets intervenants dans ce chapitre.

- $\sum_{n\geq n_0} u_n$ désigne la série de terme général u_n. C'est une **suite**.
- Pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est un **réel** (défini avant ce chapitre), appelé la n-ième somme partielle de la série de terme général u_k. Notons cette n-ième somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n.$$

En tant que suite, $\sum_{k\geq n_0} u_k$ **est** la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$.

- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ **n'est pas toujours défini**. Cette notation est définie si et seulement si la série de terme général u_n converge. Dans ce cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est un **réel**, appelé somme de la série de terme général u_n, qui est la limite de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$.

(ii) En particulier, envisager l'objet $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré sur la série de terme général u_n converge est une faute.

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, et on dispose d'une relation de Chasles.

Proposition 6. *Soit n_0 un entier naturel, $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle et $n_1 > n_0$ un entier. Alors, la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geq n_1} u_k$ converge, et dans ce cas :*

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration. À noter. □

3. Liens entre suites et séries

Remarque. Formellement, une série est une suite donc le lien est immédiat. Mais on dispose de passage intéressants d'une notion à l'autre. Commençons par une remarque.

Proposition 7. *Soit $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle (où n_0 est un entier naturel). Notons, pour tout entier n, S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$. Alors :*

$$\forall n \geq n_0+1, u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration. C'est immédiat, car par Chasles, pour tout $n \geq n_0+1$:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k + u_n = S_{n-1} + u_n.$$

□

Exemple 8. Dessin à noter.

Remarque. Voici une conséquence pratique, fournissant une manière de démontrer qu'une série diverge dans des cas simples.

Proposition 9. (et définition.) *Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle. Si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Par contraposition, si (u_k) ne tend pas vers 0, alors la série de terme général u_k diverge. Dans ce cas, on dit que la série de terme général u_k* diverge grossièrement.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Attention, la réciproque de cette proposition est fausse et c'est une erreur très courante. Par exemple, la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Exemple 10. $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la suite $(n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} n$ diverge grossièrement donc diverge.

Exemple 11. Que dire des séries $\sum_{k\geq 0}(-1)^k$ et $\sum_{k\geq 1} 1-\frac{1}{k}$?

D'un autre point de vue, si l'on étudie la convergence d'une suite $(u_n)_n$, on peut considérer la série de terme général $u_{n+1}-u_n$.

Définition 12. On dit qu'une série S est *télescopique* s'il existe une suite réelle $(a_k)_{k\geq n_0}$ telle que :

$$S = \sum_{k\geq n_0} a_{k+1}-a_k.$$

Proposition 13. *Soit S une série télescopique. Soient n_0 un entier et $(a_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle tels que :*

$$S = \sum_{k\geq n_0} a_{k+1}-a_k.$$

Alors, S converge si et seulement si la suite $(a_k)_{k\geq n_0}$ converge.

Exemple 14. Dessin à noter.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Plutôt que d'utiliser cette proposition, on devra systématiquement reprendre ce raisonnement qui permet, au passage, d'avoir une égalité reliant la somme de la série $\sum_k a_{k+1}-a_k$ et la limite de la suite (a_k).

Exemple 15. Démontrer que $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k(k-1)}$ converge.

4. Combinaison linéaire de séries convergentes

Proposition 16. *Soit n_0 un entier, et $(u_k)_{k\geq n_0}$ et $(v_k)_{k\geq n_0}$ deux suites réelles.*
Si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ convergent, alors :

(i) Pour tous réels λ et μ, la série $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k+\mu v_k$ converge, et

(ii) $\sum_{k=n_0}^{+\infty}(\lambda u_k+\mu v_k) = \lambda\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$

Démonstration. À noter. □

Remarque. En particulier, cet énoncé montre que :

(*i*) Si la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, alors la série $\sum_{k\geq n_0}\lambda u_k$ converge pour tout réel λ, et $\sum_{k=n_0}^{+\infty}\lambda u_k = \lambda\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

(*ii*) Si les séries $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ convergent, alors la série $\sum_{k\geq n_0} u_k+v_k$ converge, et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k+v_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \sum_{k\geq n_0} v_k$.

Remarque. Quand on utilise ce résultat, on dit qu'on utilise la propriété de linéarité de la sommation (on dit que la série $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ est une combinaison linéaire des séries $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$).

Exemple 17. Montrons que $\sum_{n\geq 1} 2^{-n} - 4\cdot 3^{-n}$ converge, et calculons sa somme.

Remarque. Attention aux réciproques partielles de ce résultat, qui existent mais qui présentent leurs subtilités. Il faudra refaire le raisonnement de l'exercice suivant.

Exercice 18. Soient u et v deux suites réelles définies à partir d'un rang n_0.

(*i*) Montrer que si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ diverge, alors $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ diverge pour tous réels λ et μ tels que $\mu \neq 0$. Que dire si $\mu = 0$?

(*ii*) Montrer que si $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge et $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ diverge pour certains réels λ et μ tels que $\mu \neq 0$, alors $\sum_{k\geq n_0} v_k$ diverge. Que dire si $\mu = 0$?

(*iii*) Montrer que si les séries $\sum_{k\geq n_0} u_k$ et $\sum_{k\geq n_0} v_k$ divergent, on ne peut rien conclure sur la série $\sum_{k\geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$ en général.

Remarque. Attention à ne pas utiliser la linéarité quand vous n'avez pas le droit. Par exemple,

(*i*) On a démontré dans un exercice précédent que $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ converge.

(*ii*) On a $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, mais

(*iii*) On ne peut pas écrire $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$ car $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$ ne sont pas définis (les séries concernées divergent).

5. Changement de variable

Proposition 19. *Soit n_0 un entier naturel et $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle.*
Pour tout entier relatif l tel que $l \leq n_0$, il est équivalent de dire :

(i) $\sum_{k\geq n_0} u_k$ *converge, et*

(ii) $\sum_{k\geq n_0 - l} u_{k+l}$ *converge*

De plus, dans ce cas :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0-l}^{+\infty} u_{k+l}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Dans la démonstration, on a utilisé la proposition suivante : pour toute suite réelle $(S_n)_{n\geq n_0}$, pour tout entier relatif l, les suites $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(S_{n+l})_{n\geq n_0 - l}$ ont la même nature, et même limite si elles admettent une limite. On utilise souvent cette proposition lorsqu'on étudie des suites récurrentes, pour affirmer que "$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$" (avec $l = 1$).

Remarque. Cette proposition est la formule de changement de variable pour les séries. La contrainte $l \neq n_0$ ne sert qu'à garantir que les sommes partielles considérées par ces séries sont indexées par des entiers naturels.

Exemple 20. Que dire de $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{n-1}$? De $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{k-1}}$?

II. Séries classiques

On dispose de quelques séries de référence, dont on connait bien la nature et la valeur de l'éventuelle somme, qui nous servent à traiter les séries rencontrées dans nos problèmes.

1. Série géométrique

Proposition 21. (**et définition**.) *Soit q un réel. Alors :*

(i) Si $|q| \in]-1,1[$, alors $\sum_{k\geq 0} q^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

(ii) Sinon, $\sum_{k\geq 0} q^k$ diverge.

On dit que $\sum_{k\geq 0} q^k$ est la série géométrique de raison q.

Démonstration. À noter. □

Exemple 22. Déterminons la nature et la valeur de l'éventuelle somme des séries suivantes.

(i) $\sum_{k\geq 0} 2\times 5^{-k}$ (ii) $\sum_{k\geq 0} 3\times 2^k$ (iii) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{3^k}$.

Exercice 23. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} e^{-\alpha n}$ en fonction du réel α.

2. Série géométrique dérivée d'ordre 1 ou 2

Proposition 24. (**et définition**.) *Soit q un réel. Alors :*

(i) Si $|q| \in]-1,1[$, alors $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

(ii) Sinon, $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ diverge.

On dit que $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ est la série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison q.
D'autre part :

(i) Si $|q| \in]-1,1[$, alors $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

(ii) Sinon, $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ diverge.

On dit que $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ est la série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison q.

Démonstration. À noter. □

Exemple 25. Déterminons la nature et la valeur de l'éventuelle somme des séries suivantes.

(i) $\sum_{k\geq 0} k\times 5^{1-k}$ (ii) $\sum_{k\geq 0} k\times 2^k$ (iii) $\sum_{k\geq 1} k(k-1)\frac{1}{3^k}$.

Exercice 26. Soit $p\in]-1,1[$. Déterminer la nature et l'éventuelle somme de $\sum_{k\geq 0} k^2p^k$. On utilisera que pour tout entier k, $k^2 = k + k(k-1)$.

3. Série de Riemann

Voici le critère de convergence des séries de Riemann.

Proposition 27. (**et définition.**) *Soit α un réel. Alors, la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
La série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^\alpha}$ est appelée la série de Riemann de paramètre α.

Démonstration. Cas $\alpha \leq 1$ à noter. Cas $\alpha > 1$ admis, nous verrons une démonstration très intéressante dans le chapitre sur les intégrales. $\square$

Exemple 28. La séries harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $1\leq 1$. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $2>1$.

Remarque. Cet énoncé ne dit rien sur la valeur de la somme des séries de Riemann convergentes ! Et elles sont compliquées. Comme dit dans l'introduction, un résultat bien hors programme est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 29. Que dire de la nature...

(i) de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$?

(ii) de $\sum_{n\geq 1} 2^n + \frac{1}{n\sqrt{n}}$?

(iii) de $\sum_{n\geq 1}\frac{n-1}{n^2}$?

4. Série exponentielle

Voici le résultat relatif aux séries dites "exponentielles".

Proposition 30. (**et définition.**)*Pour tout réel x, la série $\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ converge et :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.$$

La série $\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ est appelée la série exponentielle de paramètre x.

Démonstration. Admis. □

Exemple 31. Que dire de $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$?

Exercice 32. Déterminer la nature et l'éventuel somme de $\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{(k-1)!}$.

5. Une technique classique pour les séries alternées (HP en théorie, pas en pratique)

Remarque. On dit qu'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est alternée si $(u_n)_n$ change de signe à chaque nouveau terme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leq 0$.

Dans ce cas, on peut démontrer (HP) que si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $(|u_n|)_n$ est décroissante, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

Par exemple, c'est le cas de $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$, car $|\frac{(-1)^k}{k}| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, $(\frac{1}{k})_k$ est décroissante , et $(\frac{(-1)^k}{k})_k$ change bien de signe à chaque terme.

Autres exemples : $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$, $\sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Exemple 33. Méthode : Pour redémontrer qu'une série alternée converge, selon les conditions ci-dessus, on utilise le théorème des suites adjacentes selon les étapes suivantes.

- Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est alternée, et telle que $(|u_n|)_n$ converge vers 0 en étant décroissante. Notons, pour tout entier n, S_n la somme partielle d'indice n de cette série.
- On montre que $(S_{2n})_n$ et (S_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.
- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc ces suites sont adjacentes.
- Par le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite.
- Par le théorème relatif aux sous suites de rangs pairs et impairs, $(S_n)_n$ converge vers cette limite commune.
- Par définition, la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge.

Exemple 34. Montrons que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

III. Séries à termes positifs et convergence absolue

Si u_n est positif pour tout entier n, alors l'étude de la série de terme général u_n s'en retrouve simplifiée, et on dispose de théorèmes propres à cette situation.

1. Propriétés des séries à terme positif

Définition 35. Soit $(u_k)_{k\geq n_0}$ une suite réelle (où $n_0 \in \mathbb{N}$).
On dit que la série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est à termes positifs si u_k est positif pour tout entier k.

Proposition 36. *Soit* $\sum_{k \geq n_0} u_k$ *une série à termes positifs. Notons, pour tout entier* $n \geq n_0$, S_n *sa somme partielle d'indice* n. *Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $\sum_{k \geq n_0} u_k$ *converge, et*

(ii) la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ *est majorée*

Dans ce cas :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. L'idée est très simple : la suite $(S_n)_n$ est croissante, donc on peut appliquer le théorème de la limite monotone.

2. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs

Voici le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

Théorème 37. *Soit* n_0 *un entier naturel.*
Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *deux suites réelles telles que :*

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors :

(i) Si $\sum_{k \geq n_0} v_k$ *converge, alors* $\sum_{k \geq n_0} u_k$ *converge et* $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$.

(ii) Si $\sum_{k \geq n_0} u_k$ *diverge, alors* $\sum_{k \geq n_0} v_k$ *diverge.*

Démonstration. À noter. □

Exemple 38. (i) Montrer que $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

(ii) Sans utiliser le critère de convergence des séries de Riemann, montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exercice 39. (i) Montrons que $\forall k \geq 0, \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$.

(ii) En déduire la nature de $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{e^k + e^{-k}}$.

Exemple 40. Montrons que $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge.

Exemple 41. Montrons que $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

3. Convergence absolue de séries

Définition 42. On dit que la série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ *converge absolument* si la série $\sum_{k \geq n_0} |u_k|$ converge.

Proposition 43. *Si une série converge absolument, alors elle converge.*

Démonstration. Admis. □

Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple, si on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier n, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge (c'est une série alternée pour laquelle la méthode précédente s'applique), mais $\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente (comme déjà vu auparavant), donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge mais ne converge pas absolument.

Remarque. Ainsi, pour démontrer qu'une série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ converge, on peut essayer de démontrer que $\sum_{k\geq n_0} |u_k|$ converge (ce qui nous place dans le cadre des séries à termes positifs), et conclure grâce à la proposition précédente.

Exemple 44. Que dire de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$?