Programme de colle n^o 19 : Séries numériques.

Semaine du lundi 4 ***mars****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Généralités sur les séries numériques

19.1 Notion de série numérique. Nature d'une série. Somme d'une série convergente. La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, relation de Chasles.

19.2 Liens suite/série : divergence grossière, série télescopique. La réciproque de la proposition et définition 9 sur la divergence grossière est fausse, et la série harmonique fourni un contre exemple.

Pour les séries télescopiques, les élèves doivent refaire le raisonnement sur les sommes partielles.

19.3 Combinaison linéaire et séries convergentes. Ce principe permet aussi de démontrer des résultats de divergence, qu'il faudra retrouver à chaque fois. Exemple : si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge. Changement de variable pour les séries.

Pour le changement de variable, ne pas hésiter à travailler avec les sommes partielles plutôt que d'utiliser le théorème.

Séries classiques

19.4 Séries géométriques. Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2.

19.5 Séries de Riemann et critère de convergence (cas convergent admis).

19.6 Série exponentielle (admis).

19.7 Notion de série alternée (HP). Plan d'étude d'une série alternée lorsque la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

Séries à termes positifs

19.8 notion de série à termes positifs. Une série à termes positifs converge ssi elle est majorée.

19.9 Théorème de comparaison (pour $\leq$) pour les séries à termes positifs.

19.10 Séries absolument convergentes. La convergence absolue implique la convergence (admis), la réciproque est fausse.

Python

19.11 Matrice en python. utilisation du type `numpy.ndarray` de numpy. Commandes classiques liées à ce type.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion de "série de terme général u_k", la notion de série convergente, divergente, et la somme d'une série convergente. Montrer que le terme général d'une série convergente tend vers 0.
2. Énoncer et démontrer la proposition relative aux combinaisons linéaires de séries convergentes. Montrer que si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.
3. Montrer, sans utiliser le critère de convergence de Riemann, que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge. *Élèves : la démonstration complète est à reconstruire à partir des exemples du cours.*
4. Énoncer et démontrer la propositions relatives aux séries géométriques. Justifier la nature de $\sum_{k\geq 1} 3\times 4^{-k}$ et calculer sa somme.
5. Énoncer et démontrer la proposition relative aux séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2. Démontrer le résultat pour les séries géométriques dérivées d'ordre 1.
6. Montrer que la série harmonique diverge.
7. Définir la notion de série de Riemann, et donner le critère de convergence de ces séries. Démontrer le cas divergent.
8. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$.
9. Énoncer et démontrer le critère de comparaison pour les séries à termes positifs.
10. Écrire une fonction python permettant d'implémenter l'opération matricielle suivante (au choix du colleur : somme, produit de matrices, produit par un réel, transposition) lorsque ses arguments le permettent. On n'utilisera, bien entendu, aucune des fonctions fournies par python effectuant ces opérations.