

Programme de colle n° 20 : Dérivation.

Semaine du lundi 11 mars.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Dérivation des fonctions réelles

20.1 Pente d'une droite, taux d'accroissement d'une fonction entre deux points. Dérivabilité en un point et nombre dérivé. Dérivabilité à gauche et à droite. Tangente éventuellement verticale en un point.

20.2 Si f est dérivable en un point, alors elle admet un développement limité en ce point à l'ordre 1. Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

20.3 Fonction dérivable sur une partie, dérivabilité et dérivées des fonctions usuelles.

Opérations et dérivation

20.4 Combinaison linéaire, produit et quotient de fonctions dérivables. Composition et dérivation. Dérivabilité et fonction réciproque (HP, admis).

20.5 Dérivations successives. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions usuelles. Dérivée n -ième d'une somme ou d'un produit de fonctions n fois dérivables.

Inégalité des accroissements finis

20.6 Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1. Lemme de Rolle (HP), théorème des accroissements finis (HP). Inégalité des accroissements finis avec encadrement de la dérivée, avec majoration de sa valeur absolue.

20.7 Application de l'IAF à la monotonie. Une fonction est monotone sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est de signe constant. Condition suffisante de monotonie stricte sur un intervalle: la dérivée est de signe constant et s'annule en un nombre fini de points.

20.8 Condition suffisante d'extremum local. Exemple d'utilisation de l'inégalité des accroissements finis dans l'étude de suite définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Python

20.9 Représentation des graphes par liste d'adjacence, par matrice d'adjacence. Exemples avec le graphe complet. Fonctions de conversion (à finir) d'une représentation à l'autre.

La seule version de l'inégalité des accroissements finis au programme est celle avec majoration de la valeur absolue de la dérivée.

L'étude des suites récurrentes n'a été abordée que très brièvement et sera revue en début de semaine.

Quelques questions de cours

1. Énoncer les deux limites admises des taux d'accroissements de l'exponentielle et du logarithme. Les utiliser pour démontrer la dérivabilité des fonctions exponentielles et logarithme sur leur domaine (on utilisera les propriétés de *morphisme* de ces fonctions).
2. Définir la notion de fonction dérivable à droite, à gauche. Énoncer et démontrer la proposition caractérisant la dérivabilité en un point à l'aide de la dérivabilité à droite et à gauche en ce point. Définir la notion de point anguleux.
3. Énoncer la proposition (24) relative aux combinaisons linéaires, aux produits et aux quotients de fonctions dérivables. Démontrer l'énoncé portant sur le produit.
4. Énoncer et démontrer la proposition (27) relative à la composée de fonctions dérivables.
5. Définir la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Énoncer la proposition 38 relative au caractère $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions usuelles, et aux opérations sur les fonctions. Énoncer la proposition donnant la dérivée n -ième d'une somme ou d'un produit de fonctions n fois dérivables (formule de Leibniz).
6. Définir la notion d'extremum local. Énoncer et démontrer la condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1.
7. Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis (avec majoration de la valeur absolue de la dérivée).
8. Énoncer et démontrer la proposition caractérisant la monotonie sur un intervalle à l'aide du signe de la dérivée pour une fonction dérivable.
9. Énoncer et démontrer la condition suffisante de monotonie stricte sur un intervalle pour une fonction dérivable.